Feuille de TD n° 10

Équations différentielles

29 novembre 2020

Exercice 1.

1. (a) Calculer une primitive de
$$]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ u \longmapsto \frac{1}{1-u^2}.$$
(b) En déduire une primitive de
$$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}.$$
On pourra effectuer le changement de variables « $u=\sin(t)$ » .
2. Déterminer un système fondamental de solutions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle
$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y.$$
3. En déduire l'ensemble des solutions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle
$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2}.$$

Exercice 3.

1. Calculer une primitive de
$$\mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{e^{-t}}{2e^{-2t}+3}.$$
On pourra effectuer le changement de variables « $u=\mathrm{e}^{-t}$ » .
2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2e^{-2x}+3}.$$

Exercice 4. Considérons l'équation différentielle
$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0. \tag{E}$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ de $\mathbb{R}$, avec $R>0$.
On précisera la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?
3. *Bonus.* Déterminer l'ensemble des solutions définies sur un intervalle I ne contenant ni 0, ni 1, de l'équation (E).
4. *Bonus.* En déduire l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Indications

Exercice 1

1. (a) Décomposer en éléments simples $\frac{1}{1-u^2}$.

   (b) $\frac{\sin^2}{\cos} = \frac{\sin^2 \cos}{1-\sin^2}$...
2. $\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}$ est solution si et seulement si $\varphi_1' = \varphi_2$ et $\varphi_2' = -\varphi_1$. On peut donc obtenir une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par φ_1, et en déduire son expression puis celle de φ_2.
3. Appliquer la méthode de variation des constantes avec le système fondamental de solutions $\left(\begin{pmatrix}\cos(t)\\-\sin(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sin(t)\\\cos(t)\end{pmatrix}\right)$ obtenu au point précédent.

Exercice 2

Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène et en déduire un système fondamental de solutions.

Puis, appliquer la méthode de variations des constantes avec ce système fondamental de solutions pour trouver une solution particulière de l'équation.

Conclure.

Exercice 3

De même.

Exercice 4

1. Considérer une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et en remplaçant dans l'équation, déterminer une relation entre les coefficients a_n puis l'expression des a_n.
   Vérifier que la série entière obtenue a un rayon > 0 puis calculer la somme.
2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions ? Et celui des solutions développables en séries entières ?
3. Utiliser la technique d'abaissement de l'ordre avec la fonction trouvée à la question 1.
4. Considérer une solution φ sur $\mathbb{R}$. On connaît l'expression de φ sur $]0, 1[$ et φ est continue et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en 0 et en 1. En déduire des conditions sur les constantes intervenant dans l'expression de φ.