Feuille de TD n^{o} 7

Équations différentielles

1er novembre 2020

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle
$$y' = 1 + y^2.$$

Exercice 2. Soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = \mathrm{ch}(t+y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle
$$y' = 2ty(y-1).$$

1. Donner les solutions constantes de cette équation.

   Soit y_0 un nombre réel distinct de 0 et 1. Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse au problème de Cauchy
   $$\begin{cases} y' = 2ty(y-1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

2. Justifier qu'il existe une unique solution maximale à ce problème de Cauchy.
3. Soit φ une solution définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de ce problème de Cauchy.
   (a) Montrer que φ ne peut pas prendre les valeurs 0 et 1.
   (b) Justifier que l'application $t \longmapsto \dfrac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)}$ garde un signe constant sur I.
   (c) Déterminer l'expression de φ sur I. *On pourra discuter selon la valeur de y_0*
4. En déduire la solution maximale du problème de Cauchy en fonction de la valeur de y_0. On précisera son intervalle de définition.

Exercice 4.

1. Déterminer les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle
$$(t^2+1)y' - 4ty = 4t\sqrt{y}.$$
2. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'y + y^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$