Corrigé du TD n° 7

Équations différentielles

3 novembre 2020

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle

$$y' = 1 + y^2. \tag{1}$$

- **Identification :** Il s'agit d'une équation différentielle scalaire non linéaire du premier ordre. Remarquons que l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y) \longmapsto 1 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.
- **Résolution par séparation des variables :** Soit φ une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dérivable.
  φ est solution sur I de (1) si et seulement si, pour tout $t \in I$,
  $$\varphi'(t) = 1 + \varphi(t)^2,$$
  soit encore, puisque $\varphi^2 + 1$ ne s'annule pas sur I, si et seulement si pour tout $t \in I$,
  $$\frac{\varphi'(t)}{1 + \varphi(t)^2} = 1.$$
  Par intégration, φ est donc solution sur I si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$,
  $$\arctan(\varphi(t)) = t + \lambda.$$
  Comme pour tout $t \in I$, $\arctan(\varphi(t)) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que φ est solution si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $t + \lambda \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi(t) = \tan(t + \lambda)$.
  Ainsi, l'ensemble des solutions maximales de l'équation (1) est
  $$\mathcal{S} = \left\{ \left]-\frac{\pi}{2} - \lambda, \frac{\pi}{2} - \lambda\right[\longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \tan(t + \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2. Soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{ch}(t + y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

- **Identification :** Il s'agit d'une équation différentielle autonome d'ordre 1.
  L'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y) \longmapsto \operatorname{ch}(t + y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy (2) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.
- **Résolution par séparation des variables :** Soit φ_m la solution maximale définie sur un intervalle I_m contenant t_0 de ce problème de Cauchy.
  Posons, pour tout $t \in I_m$, $\psi(t) = \varphi_m(t) + t$. Alors ψ est dérivable et pour tout $t \in I_m$,
  $$\psi'(t) = \varphi_m'(t) + 1 = \operatorname{ch}(t + \varphi_m(t)) + 1 = \operatorname{ch}(\psi(t)) + 1.$$
  De plus, $\psi(t_0) = y_0 + t_0$.
  Donc ψ est la solution maximale du problème de Cauchy
  $$\begin{cases} y' = \operatorname{ch}(y) + 1 \\ y(t_0) = y_0 + t_0. \end{cases}$$
  Comme $1 + \operatorname{ch}$ est strictement positive, pour tout $t \in I_m$, on a donc
  $$\frac{\psi'(t)}{\operatorname{ch}(\psi(t)) + 1} = 1.$$

Donc par intégration, pour tout $t \in I_m$,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)}{\operatorname{ch}(\psi(s))+1} \mathrm{d}s = t - t_0.$$

Donc pour tout $t \in I_m$,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)}{2\operatorname{ch}^2(\frac{\psi(s)}{2})} \mathrm{d}s = t - t_0.$$

Par le changement de variables « $u = \psi(s)$ », de classe $\mathcal{C}^1$, pour tout $t \in I_m$,

$$\int_{y_0+t_0}^{\psi(t)} \frac{1}{2\operatorname{ch}^2(\frac{u}{2})} \mathrm{d}u = t - t_0,$$

soit

$$\operatorname{th}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right) = t - t_0 + \operatorname{th}\left(\frac{y_0+t_0}{2}\right).$$

Posons $\lambda_0 = t_0 - \operatorname{th}\left(\frac{y_0+t_0}{2}\right)$.

Comme $\operatorname{th}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right) \in]-1,1[$, $t - \lambda_0 \in]-1,1[$ et pour tout $t \in I_m$,

$$\psi(t) = 2\operatorname{argth}(t - \lambda_0),$$

soit

$$\varphi_m(t) = 2\operatorname{argth}(t - \lambda_0) - t,$$

Réciproquement, on vérifie que l'application

$$\tilde{\varphi} :]-1+\lambda_0, 1+\lambda_0[\longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto 2\operatorname{argth}(t-\lambda_0) - t$$

est solution de l'équation et vérifie la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Cette solution est maximale car elle tend vers $\pm\infty$ aux bornes de l'intervalle. Il s'agit donc d'une solution maximale du problème de Cauchy (2), et par unicité de la solution maximale, on en déduit que $\varphi_m = \tilde{\varphi}$ et $I_m =]-1+\lambda_0, 1+\lambda_0[$.
Ainsi la solution maximale du problème de Cauchy est l'application

$$\varphi_m :]-1+\lambda_0, 1+\lambda_0[\longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto 2\operatorname{argth}(t-\lambda_0) - t,$$

où l'on a posé $\lambda_0 = t_0 - \operatorname{th}\left(\frac{y_0+t_0}{2}\right)$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$y' = 2ty(y-1).$$

1. Donner les solutions constantes de cette équation.

   Soit y_0 un nombre réel distinct de 0 et 1. Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2ty(y-1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

2. Justifier qu'il existe une unique solution maximale à ce problème de Cauchy.
3. Soit φ une solution définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de ce problème de Cauchy.
   (a) Montrer que φ ne peut pas prendre les valeurs 0 et 1.
   (b) Justifier que l'application $t \longmapsto \dfrac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)}$ garde un signe constant sur I.
   (c) Déterminer l'expression de φ sur I. *On pourra discuter selon la valeur de y_0*
4. En déduire la solution maximale du problème de Cauchy en fonction de la valeur de y_0. On précisera son intervalle de définition.

---

1. Posons $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t,y) \longmapsto 2ty(y-1)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t,y) = 0$ si et seulement si $y = 0$ ou $y = 1$.
   L'application nulle et l'application constante égale à 1 sont donc les solutions constantes de cette équation.
2. L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

3. (a) Supposons que φ prenne la valeur 0 (resp. 1) en un point t_0. Alors φ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2ty(y-1) \\ y(t_0) = 0 \text{ (resp. 1)} \end{cases},$$

et donc par unicité de la solution à ce problème de Cauchy d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, φ est égale à la fonction constante égale à 0 (resp. 1). Or $\varphi(0) = y_0$ est distinct de 0 et 1, ce qui est absurde. Donc φ ne peut pas prendre les valeurs 0 et 1.

(b) Comme φ ne s'annule pas et est continue, l'application $t \longmapsto \dfrac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)}$ est bien définie et est continue. De plus, cette application ne s'annule pas car pour tout $t \in I$, $\varphi(t) \neq 1$. Ainsi, l'application $t \longmapsto \dfrac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)}$ garde un signe constant sur I.

(c) Pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = 2t\varphi(t)(\varphi(t)-1).$$

Comme φ ne s'annule pas sur I, pour tout $t \in I_m$, on a donc

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)(\varphi(t)-1)} = 2t.$$

Donc par intégration, pour tout $t \in I$,

$$\int_0^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)(\varphi(s)-1)} \mathrm{d}s = t^2.$$

Par le changement de variables « $u = \varphi(s)$ », de classe $\mathcal{C}^1$, pour tout $t \in I$,

$$\int_{y_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{u(u-1)} \mathrm{d}u = t^2.$$

Or $\dfrac{1}{u(u-1)} = \dfrac{-1}{u} + \dfrac{1}{u-1}$.
Donc, pour tout $t \in I$,

$$\int_{y_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{u(u-1)} \mathrm{d}u = [-\ln(|u|) + \ln(|u-1|)]_{y_0}^{\varphi(t)} = \ln\left(\left|\frac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)}\right|\right) - \ln\left(\left|\frac{y_0-1}{y_0}\right|\right).$$

Donc, pour tout $t \in I$,

$$\ln\left(\left|\frac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)}\right|\right) = t^2 + \ln\left(\left|\frac{y_0-1}{y_0}\right|\right),$$

soit

$$\left|\frac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)}\right| = \left|\frac{y_0-1}{y_0}\right| \mathrm{e}^{t^2}.$$

Si $y_0 > 1$ alors φ est strictement supérieure à 1 sur I donc $\dfrac{\varphi-1}{\varphi}$ est strictement positive sur I et $\dfrac{y_0-1}{y_0} > 0$.
Si $y_0 < 0$ alors φ est strictement inférieure à 0 sur I et donc $\dfrac{\varphi-1}{\varphi}$ est strictement positive sur I et $\dfrac{y_0-1}{y_0} > 0$.
Si $y_0 \in]0,1[$, alors φ est à valeurs dans $]0,1[$ sur I et donc $\dfrac{\varphi-1}{\varphi}$ est strictement négative sur I et $\dfrac{y_0-1}{y_0} < 0$.
On en déduit que pour tout $t \in I$,

$$\frac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)} = \frac{y_0-1}{y_0}\mathrm{e}^{t^2},$$

soit

$$\frac{1}{\varphi(t)} = 1 - \frac{y_0-1}{y_0}\mathrm{e}^{t^2} = 1 - \left(1 - \frac{1}{y_0}\right)\mathrm{e}^{t^2}.$$

Comme pour tout $t \in I$, $\dfrac{1}{\varphi(t)}$ est non nul, on en déduit que pour tout $t \in I$, $1 - \left(1 - \dfrac{1}{y_0}\right)\mathrm{e}^{t^2} \neq 0$ et

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{y_0}\right)\mathrm{e}^{t^2}}.$$

4. Déterminons les plus grands intervalles I possibles contenant 0 tels que pour tout $t \in I$, $1 - \left(1 - \dfrac{1}{y_0}\right)\mathrm{e}^{t^2} \neq 0$, ie $\mathrm{e}^{-t^2} \neq 1 - \dfrac{1}{y_0}$.

Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t^2} \in]0,1[$.

- Si $y_0 < 0$ alors $1 - \dfrac{1}{y_0} > 1$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t^2} \neq 1 - \dfrac{1}{y_0}$. De même, si $y_0 \in]0,1[$ alors $1 - \dfrac{1}{y_0} < 0$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t^2} \neq 1 - \dfrac{1}{y_0}$.

Ainsi, pour $y_0 < 1$ et $y_0 \neq 0$, on vérifie que l'application

$$\varphi_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \frac{1}{1 - \left(1 - \dfrac{1}{y_0}\right) \mathrm{e}^{t^2}}$$

est solution du problème de Cauchy et est globale donc maximale. Par unicité de la solution maximale du problème de Cauchy, c'est donc LA solution maximale du problème de Cauchy.

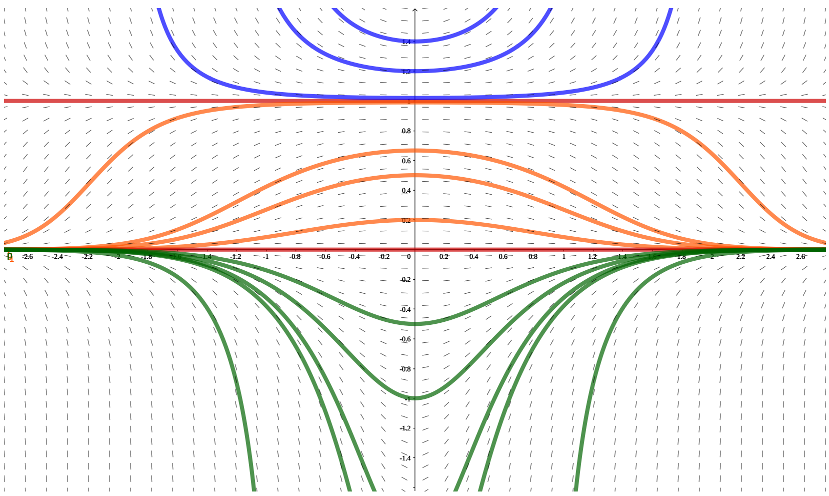
• Si $y_0 > 1$, alors $1 - \dfrac{1}{y_0} \in]0, 1[$. On a alors $\mathrm{e}^{-t^2} = 1 - \dfrac{1}{y_0}$ si et seulement si $t^2 = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{y_0}\right)$, soit si et seulement si $t = \pm\sqrt{-\ln\left(1 - \dfrac{1}{y_0}\right)}$.

Posons $\alpha_{y_0} = \sqrt{-\ln\left(1 - \dfrac{1}{y_0}\right)}$.

Comme 0 appartient à l'intervalle de définition de la solution maximale, on vérifie que l'application

$$\varphi :]-\alpha_{y_0}, \alpha_{y_0}[\longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \frac{1}{1 - \left(1 - \dfrac{1}{y_0}\right) \mathrm{e}^{t^2}}$$

est solution du problème de Cauchy et est maximale car tend vers l'infini en $\pm\alpha_{y_0}$. Par unicité de la solution maximale du problème de Cauchy, c'est donc LA solution maximale du problème de Cauchy.



Exercice 4.

1. Déterminer les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y' - 4ty = 4t\sqrt{y}.$$

2. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'y + y^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. — **Identification :** Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation est équivalente à

$$y' - \frac{4t}{t^2+1}y = \frac{4t}{t^2+1}\sqrt{y}.$$

On reconnaît donc une équation de Bernoulli avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Remarquons que l'on a $y' = f(t, y)$ avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; (t, y) \longmapsto \dfrac{4ty}{t^2+1} + \dfrac{4t}{t^2+1}\sqrt{y}$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.

— **Changement de fonction inconnue :**
Soit φ une application d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Posons, pour tout $t \in J$, $\psi(t) = \varphi(t)^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\varphi(t)}$. ψ est bien définie car φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et ψ est dérivable car φ l'est sur J et $t \longmapsto \sqrt{t}$ l'est sur $\mathbb{R}^*$.
Pour tout $t \in J$, $\psi'(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{2\sqrt{\varphi(t)}}$.
Alors φ est solution sur J de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in J$,

$$(t^2+1)\psi'(t) = \frac{4t\varphi(t) + 4t\sqrt{\varphi(t)}}{2\sqrt{\varphi(t)}} = 2\psi(t) + 2t,$$

soit encore, si et seulement si ψ est solution à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(t^2+1)y' = 2ty + 2t.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $(t^2+1)y' = 2ty$ est

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda(t^2+1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Une solution particulière de $(t^2+1)y' = 2ty + 2t$ est $t \longmapsto -1$.
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $(t^2+1)y' = 2ty + 2t$ est

$$\mathcal{S}_l = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda(t^2+1) - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Donc φ est solution sur J de l'équation si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in J$, $\psi(t) = \lambda(t^2+1)-1$ et ψ est à valeurs strictement positives.

— **Recherche des solutions maximales :**
• **1^er cas :** $\lambda \leq 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) \leq 0$.
• **2^ème cas :** $\lambda > 1$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) > 0$.
Posons alors

$$\varphi_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda(t^2+1) - 1$$

solution globale donc maximale.
• **3^ème cas :** $\lambda \in]0,1]$. Alors $\psi(t) > 0$ si et seulement si $t \in]-\infty, -\alpha_\lambda[\cup]\alpha_\lambda, +\infty[$, où $\alpha_\lambda = \sqrt{\dfrac{1-\lambda}{\lambda}}$.
Posons alors

$$\varphi_\lambda^- :]-\infty, \alpha_\lambda[\longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda(t^2+1) - 1,$$

et

$$\varphi_\lambda^+ :]\alpha_\lambda, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda(t^2+1) - 1.$$

Ces solutions sont maximales car tendent vers 0 en $\pm\alpha_\lambda$.
Ainsi, l'ensemble des solutions maximales à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation est

$$\{\varphi_\lambda, \lambda \in]1,+\infty[\} \cup \left\{\varphi_\lambda^-, \lambda \in]0,1]\right\} \cup \left\{\varphi_\lambda^+, \lambda \in]0,1]\right\}.$$

2. — **Identification :** L'application exp étant strictement positive, une solution de l'équation ne s'annule jamais. L'équation se ramène donc à l'équation

$$y' + y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\frac{1}{y}.$$

On reconnait une équation de Bernoulli avec $\alpha = -1$.
L'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, (t,y) \longmapsto -y + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\dfrac{1}{y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.

— **Changement de fonction inconnue :** Soit φ_m la solution maximale définie sur un intervalle I_m contenant 0 de ce problème de Cauchy.
Posons, pour tout $t \in I_m$, $\psi(t) = \varphi(t)^2$. Alors ψ est bien définie car φ ne s'annule pas, est dérivable et pour tout $t \in I$,

$$\psi'(t) = 2\varphi'(t)\varphi(t).$$

Donc pour tout $t \in I_m$, $\psi'(t) = -2\varphi(t)^2 + \mathrm{e}^{-2t} = -2\psi(t) + \mathrm{e}^{-2t}$.
Donc ψ est solution sur I_m de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = -2y + \mathrm{e}^{-2t}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' = -2y$ est

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{-2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

On peut chercher une solution particulière de l'équation $y' = -2y + \mathrm{e}^{-2t}$ sous la forme $t \longmapsto at\mathrm{e}^{-2t}$ et après calculs, on trouve $t \longmapsto t\mathrm{e}^{-2t}$.
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $y' = -2y + \mathrm{e}^{-2t}$ est

$$\mathcal{S}_l = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{-2t} + t\mathrm{e}^{-2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I_m$, $\psi(t) = (\lambda + t)\mathrm{e}^{-2t}$. De plus, $\psi(0) = \varphi(0)^2 = y_0^2$. Donc $\lambda = y_0^2$.
Comme $\psi = \varphi^2$ est à valeurs strictement positives, pour tout $t \in J$, $y_0^2 + t > 0$.

On a donc, pour tout $t \in I_m$, $\varphi(t) = \sqrt{y_0^2 + t}\,\mathrm{e}^{-t}$.

Réciproquement, on vérifie que l'application

$$\tilde{\varphi} : \left]-y_0^2, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \sqrt{y_0^2 + t}\,\mathrm{e}^{-t}$$

est solution de l'équation et vérifie la condition initiale $y(0) = y_0$. Cette solution est maximale car elle tend vers 0 en $-y_0^2$. Il s'agit donc d'une solution maximale du problème de Cauchy (2). Par unicité de la solution maximale, on en déduit que $\varphi_m = \tilde{\varphi}$ et $I_m =]-y_0^2, +\infty[$.
Ainsi la solution maximale du problème de Cauchy est l'application

$$\varphi_m :]-y_0^2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \sqrt{y_0^2 + t}\,\mathrm{e}^{-t}.$$