Feuille de TD n° 7

Équations différentielles

3 novembre 2020

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle

$$y' = 1 + y^2.$$

Exercice 2. Soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{ch}(t+y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$y' = 2ty(y-1).$$

1. Donner les solutions constantes de cette équation.

   Soit y_0 un nombre réel distinct de 0 et 1. Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2ty(y-1) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

2. Justifier qu'il existe une unique solution maximale à ce problème de Cauchy.
3. Soit φ une solution définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de ce problème de Cauchy.
   (a) Montrer que φ ne peut pas prendre les valeurs 0 et 1.
   (b) Justifier que l'application $t \longmapsto \dfrac{\varphi(t)-1}{\varphi(t)}$ garde un signe constant sur I.
   (c) Déterminer l'expression de φ sur I. *On pourra discuter selon la valeur de y_0*
4. En déduire la solution maximale du problème de Cauchy en fonction de la valeur de y_0. On précisera son intervalle de définition.

Exercice 4.

1. Déterminer les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(t^2+1)y' - 4ty = 4t\sqrt{y}.$$

2. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'y + y^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Indications

Exercice 2

Poser $\psi(t) = \varphi(t) + t$ pour se ramener à l'équation $y' = \operatorname{ch}(y) + 1$.

On pourra utiliser les formules de trigonométrie hyperbolique :

$\operatorname{ch}^2(x) = \operatorname{ch}(2x) + 1$ et $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

Exercice 3

On trouve qu'une solution s'exprime sous la forme $t \longmapsto \dfrac{1}{1 - \left(1 - \dfrac{1}{y_0}\right) \mathrm{e}^{t^2}}$.

Pour trouver la solution maximale du problème de Cauchy, il faut trouver l'intervalle le plus grand possible contenant 0 et tel que $1 - \left(1 - \dfrac{1}{y_0}\right) \mathrm{e}^{t^2} \neq 0$.

On pourra distinguer le cas où $y_0 < 0$, $y_0 \in]0, 1[$ et $y_0 > 1$.

Exercice 4

1. On reconnait une équation de Bernoulli avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$.
2. On divisant par y (à justifier), on se ramène à une équation de Bernoulli avec $\alpha = -1$.