Feuille de TD n° 8

Équations différentielles

10 novembre 2020

Exercice 1. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+ty} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Justifier que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale φ_m.
2. Montrer que φ_m est impaire.
3. Montrer que φ_m est strictement croissante.
4. Montrer que φ_m est une solution définie sur tout $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les limites en l'infini de φ_m. En déduire que φ_m est bijective de $\mathbb{R}$ sur son image, à préciser. On note ψ la bijection réciproque de l'application φ_m.
6. Exprimer ψ à l'aide d'une intégrale en formant une équation différentielle vérifiée par cette fonction.

Exercice 2. On considère sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$ty' = t + y^2.$$

1. Montrer que les solutions sont définies sur des intervalles bornés de $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier le comportement d'une solution maximale aux bornes de son intervalle de définition.

Exercice 3. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{-ty}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Justifier qu'il existe une unique solution maximale φ_m à ce problème de Cauchy.
2. Montrer que φ_m est impaire.
3. Montrer que φ_m est définie sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que φ_m possède une limite finie a en $+\infty$.
5. Montrer que $a > 1$.
6. Montrer que $a - \varphi_m(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t}\right)$.
7. En déduire que $\varphi_m(a) = a - \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-at} + \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-at})$.

Indications

Exercice 1

4. Notons $I =]a, b[$. Supposer que $b < +\infty$ et montrer que φ_m est majorée. Conclure par le théorème des bouts.

5. Par stricte croissante, on sait que φ_m admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en b. Supposer que $\ell < +\infty$. En déduire que $t \longmapsto \dfrac{1}{1 + t\varphi_m(t)}$ est non intégrable au voisinage de $+\infty$. Conclure.

6. Utiliser la formule de dérivée de l'inverse $f^{-1'} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

7. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = 1 + ty, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ On pourra exprimer la solution en fonction d'une intégrale.

Exercice 2

1. Soit $t_0 \in I$. Pour tout $t \geq t_0$, on a $\dfrac{1}{t} = \dfrac{\varphi'_m(t)}{t + \varphi_m(t)^2} \leq \dfrac{\varphi'_m(t)}{t_0 + \varphi_m(t)^2}$. Par intégration, en déduire que il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$ avec $t \geq t_0$, $t \leq C$.

2. On a $b < +\infty$. Conclure à l'aide du théorème des bouts.

Pour a, distinguer le cas où $a > 0$ et $a = 0$. Justifier que dans tous les cas, φ a une limite ℓ' dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a.

Si $a > 0$, utiliser le théorème des bouts.

Si $a = 0$, peut-on encore utiliser le théorème des bouts ? Montrer par l'absurde que $\ell' = 0$: sinon, on a $\dfrac{\varphi'_m(t)}{\varphi_m(t)^2} = \dfrac{1}{\varphi_m(t)^2} + \dfrac{1}{t}$ puis par intégration, obtenir à une contradiction.

Exercice 3

4. Montrer que φ_m converge vers $a = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\varphi(s)}\mathrm{d}s$.

5. Montrer que $a \geq \dfrac{1}{a}$ en utilisant que $\varphi_m \leq a$. (minorer dans l'intégrale définissant a).

A quelle condition a-t-on $a = 1$? Conclure.

6. Montrer que $t(a - \varphi_m(t)) \leq \int_t^{+\infty} s\mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s$ puis conclure.

7. Utiliser $\mathrm{e}^{-t\varphi_m(t)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-at}$ et intégrer.