Corrigé du TD n° 8

Équations différentielles

19 novembre 2020

Exercice 1. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+ty} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Justifier que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale φ_m.
2. Montrer que φ_m est impaire.
3. Montrer que φ_m est strictement croissante.
4. Montrer que φ_m est une solution définie sur tout $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les limites en l'infini de φ_m. En déduire que φ_m est bijective de $\mathbb{R}$ sur son image, à préciser. On note ψ la bijection réciproque de l'application φ_m.
6. Exprimer ψ à l'aide d'une intégrale en formant une équation différentielle vérifiée par cette fonction.

---

1. Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire du premier ordre.
   Posons $J = \left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1+ty \neq 0\right\}$, ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   L'application $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t,y) \longmapsto \dfrac{1}{1+ty}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe donc une unique solution maximale φ_m définie sur un intervalle ouvert $I =]a,b[$ contenant 0.
2. Posons, pour tout $t \in]-b,-a[$, $\psi(t) = -\varphi(-t)$. Alors ψ est bien définie, dérivable car φ l'est, et pour tout $t \in]-b,-a[$
   $$\psi'(t) = \varphi'(-t) = \frac{1}{1 - t\varphi_m(-t)} = \frac{1}{1+t\varphi_m(t)}.$$
   De plus, $\psi(0) = -\varphi(-0) = 0$. Donc ψ est solution du problème de Cauchy
   $$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+ty} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
   Or φ est LA solution maximale de ce problème de Cauchy, donc ψ est une restriction de φ et $]-b,-a[\subset]a,b[$. On en déduit donc que $a = -b$ et $\varphi = \psi$ sur l'intervalle $]-b,b[$.
   Donc φ est impaire et $I =]-b,b[$.
3. Pour tout $t \in]a,b[$, $\varphi_m'(t) = \dfrac{1}{1+t\varphi_m(t)} \neq 0$ donc, φ_m étant de classe $\mathcal{C}^1$, φ_m' est continue et ne s'annule pas, donc garde un signe constant. Or $\varphi_m'(0) = \dfrac{1}{1+0\varphi_m(0)} = 1$. Donc φ_m' est strictement positive sur I et φ_m est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Supposons par l'absurde que $b < +\infty$.
   Pour tout $t \in [0,b[$, φ_m étant croissante et nulle en 0, φ_m est positive sur l'intervalle $[0,b[$.
   Donc pour tout $t \in [0,b[$, $t\varphi(t) \geq 0$ et
   $$\varphi_m'(t) = \frac{1}{1+t\varphi_m(t)} \leq 1.$$
   Alors, pour tout $t \in [0,b[$,
   $$\varphi_m(t) = \int_0^t \varphi_m'(s)\mathrm{d}s \leq \int_0^t 1\mathrm{d}s \leq t \leq b.$$
   Donc φ_m est majorée par b sur $[0,b[$ et strictement croissante, donc φ_m admet une limite ℓ finie en b. Comme $\varphi_m(0) = 0$ et par croissance de φ_m, on a $\ell \in \mathbb{R}_+$. Par positivité de b et ℓ, on en déduit que $1 + b\ell \neq 0$ et donc $(b,\ell) \in J$.
   D'après le théorème des bouts, φ_m est donc prolongeable en b et n'est donc pas maximale, ce qui est absurde.
   Donc $b = +\infty$ et $I =]-b,b[= \mathbb{R}$. Donc φ_m est une solution définie sur tout $\mathbb{R}$.

5. φ_m étant strictement croissante, elle admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell > 0$ car $\varphi_m(0) = 0$.
Supposons par l'absurde que $\ell < +\infty$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_m(t) = \int_0^t \varphi_m'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{1}{1 + s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s$.
Or $\varphi_m(t)$ tend vers ℓ lorsque t tend vers $+\infty$. Donc
$$\frac{1}{1 + t\varphi_m(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t\ell}.$$
Or $t \longmapsto \frac{1}{t\ell}$ est non intégrable au voisinage de $+\infty$. Donc par comparaison de fonctions positives, $t \longmapsto \frac{1}{1 + t\varphi_m(t)}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$.
Donc $\varphi(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$, ce qui est absurde.
Donc φ_m tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et par imparité, φ_m tend vers $-\infty$ en $-\infty$.

La fonction φ_m étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle induit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi_m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ d'après les calculs de limites en l'infini.
6. φ_m étant bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée qui ne s'annule pas, sa bijection réciproque ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi'(t) = \frac{1}{\varphi_m'(\psi(t))} = 1 + t\psi(t).$$
ψ est donc solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = ty + 1$.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
On cherche une solution particulière par la méthode de variation des constantes sous la forme $\varphi_p(t) = f(t)\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$, avec f dérivable sur $\mathbb{R}$.
On obtient alors $f'(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
Choisissons par exemple, $f(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{\frac{-s^2}{2}}\mathrm{d}s$. Alors $\varphi_p(t) = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\mathrm{d}s$.
Donc l'ensemble des solution de $y' = ty + 1$ est
$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\mathrm{d}s \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi(t) = \lambda \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\mathrm{d}s.$$
Or $\psi(0) = 0$. Donc $\lambda = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi(t) = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\mathrm{d}s.$$

Exercice 2. On considère sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle
$$ty' = t + y^2. \tag{1}$$

1. Montrer que les solutions sont définies sur des intervalles bornés de $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier le comportement d'une solution maximale aux bornes de son intervalle de définition.

---

1. L'application $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ à tout problème de Cauchy.
Soit φ_m une solution maximale de l'équation définie sur un intervalle $I =]a, b[$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $a > 0$. Montrons que $b < +\infty$.
Soit $t_0 \in I$. Pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, $\frac{1}{t} = \frac{\varphi_m'(t)}{t + \varphi_m(t)^2} \leq \frac{\varphi_m'(t)}{t_0 + \varphi_m(t)^2} = \frac{1}{t_0} \frac{\varphi_m'(t)}{1 + \left(\frac{\varphi_m(t)}{\sqrt{t_0}}\right)^2}$.
Donc, pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, par intégration et changement de variables $u = \frac{\varphi_m(t)}{\sqrt{t_0}}$ de classe $\mathcal{C}^1$,
$$\ln(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t_0}} \arctan\left(\frac{\varphi_m(t)}{\sqrt{t_0}}\right) + \lambda \leq \frac{1}{\sqrt{t_0}} \frac{\pi}{2} + \lambda,$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, $t \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{t_0}}\frac{\pi}{2} + \lambda}$. Donc, en laissant tendre t vers b, on obtient $b \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{t_0}}\frac{\pi}{2} + \lambda}$ et donc $b < +\infty$. Donc I est un intervalle borné de $\mathbb{R}_+^*$.
Toute solution étant restriction d'une solution maximale, on en déduit que les solutions sont définies sur des intervalles bornés de $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit φ_m une solution maximale de l'équation définie sur un intervalle $I =]a, b[$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Etude de la limite en b : Pour tout $t \in I$, $\varphi_m'(t) = \dfrac{t + \varphi_m(t)^2}{t} > 0$ donc φ_m est strictement croissante. Elle admet donc une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en b.

Comme $b < +\infty$, d'après le théorème des bouts, on en déduit que φ_m n'admet pas de limite finie en b, puisque sinon, on aurait $(b, \ell') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et φ_m ne serait pas maximale. Donc φ_m tend vers $+\infty$ en b.

Etude de la limite en a : De la même manière, φ_m admet une limite $\ell' \in \overleftarrow{\mathbb{R}}$ en a.

• 1^{er} cas : $a > 0$. Comme $0 < a$, d'après le théorème des bouts, on en déduit que φ_m n'admet pas de limite finie en a, puisque sinon, on aurait $(a, \ell') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et φ_m ne serait pas maximale. Donc φ_m tend vers $-\infty$ en a.

• 2^{nd} cas : $a = 0$. *Attention, le théorème des bouts ne s'applique plus car $a \notin \mathbb{R}_+^*$!*

φ_m étant strictement croissante, elle s'annule au plus une fois en un point t_1. Considérons alors un élément t_0 de I tel que $t_0 < t_1$ si φ_m s'annule en t_1.

Pour tout $t \in I$ tel que $t < t_0$, $\varphi_m(t) \neq 0$ et

$$\frac{1}{t} = \frac{\varphi_m'(t)}{t + \varphi_m(t)^2}$$

Par intégration, pour tout $t \in]0, t_0[$,

$$\ln\left(\frac{t_0}{t}\right) = \int_t^{t_0} \frac{\varphi_m'(s)}{s + \varphi_m(s)^2} \mathrm{d}s \leq \int_t^{t_0} \frac{\varphi_m'(s)}{\varphi_m(s)^2} \mathrm{d}s = \frac{1}{\varphi_m(t)} - \frac{1}{\varphi_m(t_0)}.$$

Supposons par l'absurde que $\ell' \neq 0$. Alors $t \longmapsto \dfrac{1}{\varphi_m(t)}$ est continue sur l'intervalle $]0, b[$ et se prolonge par continuité en 0, donc est une fonction bornée sur $[0, b[$.

Mais $\ln\left(\dfrac{t_0}{t}\right)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0.

Ceci est absurde.

Donc $\ell' = 0$ et φ_m tend vers 0 en 0.

Exercice 3. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{-ty}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Justifier qu'il existe une unique solution maximale φ_m à ce problème de Cauchy.
2. Montrer que φ_m est impaire.
3. Montrer que φ_m est définie sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que φ_m possède une limite finie a en $+\infty$.
5. Montrer que $a > 1$.
6. Montrer que $a - \varphi_m(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$.
7. En déduire que $\varphi_m(a) = a - \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-at} + \underset{t \to +\infty}{o}(\mathrm{e}^{-at})$.

---

1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y) \longmapsto \mathrm{e}^{-ty}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème de Cauchy admet donc une unique solution φ_m définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contenant 0.
2. Posons, pour tout $t \in]-b, -a[$, $\psi(t) = -\varphi(-t)$. Alors ψ est bien définie, dérivable car φ l'est, et pour tout $t \in]-b, -a[$

$$\psi'(t) = \varphi'(-t) = \mathrm{e}^{-(-t)\varphi_m(-t)} = \mathrm{e}^{t\varphi_m(-t)} = \mathrm{e}^{-t\psi(t)}.$$

De plus, $\psi(0) = -\varphi(-0) = 0$. Donc ψ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{-ty} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Or φ_m est LA solution maximale de ce problème de Cauchy, donc ψ est une restriction de φ_m et $]-b, -a[\subset]a, b[$. On en déduit donc que $a = -b$ et $\varphi = \psi$ sur l'intervalle $]-b, b[$.

Donc φ est impaire et $I =]-b, b[$.

3. Version 1 : Pour tout $t \in I$, $\varphi_m'(t) = \mathrm{e}^{-t\varphi_m(t)} > 0$. Donc φ_m est strictement croissante sur I. De plus, comme $\varphi_m(0) = 0$, on en déduit que φ_m est positive sur $[0, b[$.

Soit $t_0 \in]0,b[$. Posons $c = \varphi_m(t_0)$. Alors $c > \varphi_m(0) = 0$. Pour tout $t \in [t_0, b[$,

$$\begin{aligned}\varphi_m(t) = \varphi_m(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi_m'(s)\mathrm{d}s = \varphi_m(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s \\ \leq \varphi_m(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-cs}\mathrm{d}s = \varphi_m(t_0) + \frac{1}{c}\mathrm{e}^{-ct_0} - \frac{1}{c}\mathrm{e}^{-ct} \\ \leq \varphi_m(t_0) + \frac{1}{c}\mathrm{e}^{-ct_0}.\end{aligned}$$

Donc φ_m est croissante et majorée sur l'intervalle $[t_0, b[$. Elle admet donc une limite finie ℓ en b.
Supposons par l'absurde que $b < +\infty$. Alors $(b, \ell) \in \mathbb{R}^2$, et d'après le théorème des bouts, φ_m est prolongeable en b et n'est donc pas maximale. Ceci est absurde.
Donc $b = +\infty$ et $I = \mathbb{R}$.

Version 2 : Pour tout $t \in I$, $\varphi_m'(t) = \mathrm{e}^{-t\varphi_m(t)} > 0$. Donc φ_m est strictement croissante sur I. De plus, comme $\varphi_m(0) = 0$, on en déduit que φ_m est positive sur $[0, b[$.
Supposons par l'absurde que $b < +\infty$.
Pour tout $t \in [0, b[$,

$$\varphi_m(t) = \int_0^t \varphi_m'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s \leq \int_0^t 1\mathrm{d}s = t \leq b$$

Donc φ_m est croissante et majorée sur l'intervalle $[0, b[$. Elle admet donc une limite finie ℓ en b. Comme $(b, \ell) \in \mathbb{R}^2$, d'après le théorème des bouts, φ_m est prolongeable en b et n'est donc pas maximale. Ceci est absurde.
Donc $b = +\infty$ et $I = \mathbb{R}$.
L'application φ_m est donc définie sur $\mathbb{R}$.

4. Version 1 : Dans la question précédente (V1), nous avons déjà vu que φ_m admet une limite finie en $b = +\infty$.

   Version 2 :
   Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $c = \varphi_m(t_0)$. Alors $c > 0$. Pour tout $t \in [t_0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}\varphi_m(t) = \varphi_m(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi_m'(s)\mathrm{d}s = \varphi_m(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s \\ \leq \varphi_m(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-cs}\mathrm{d}s = \varphi_m(t_0) + \frac{1}{c}\mathrm{e}^{-ct_0} - \frac{1}{c}\mathrm{e}^{-ct} \\ \leq \varphi_m(t_0) + \frac{1}{c}\mathrm{e}^{-ct_0}.\end{aligned}$$

   Donc φ_m est croissante et majorée sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$. Elle admet donc une limite finie a en $+\infty$.
5. Par intégration, comme $\varphi_m(0) = 0$, on a, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\varphi_m(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s.$$

   Comme φ_m admet une limite a finie en $+\infty$, on obtient la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s$$

   et

$$a = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s.$$

   φ_m étant strictement croissante, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_m(t) < a$.
   Donc

$$a = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\varphi(s)}\mathrm{d}s > \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-as}\mathrm{d}s = \frac{1}{a}.$$

   Par positivité de φ_m sur $\mathbb{R}_+$, $a > 0$ et donc $a^2 > 1$. D'où $a > 1$.
6. Version 1 : Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par croissance de φ_m, on a

$$0 \leq t(a - \varphi_m(t)) = t\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s \leq t\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-\varphi_m(t)s}\mathrm{d}s = t\frac{\mathrm{e}^{-t\varphi_m(t)}}{\varphi_m(t)}.$$

   Or φ_m étant strictement positive et de limite finie strictement positive en $+\infty$, $t\dfrac{\mathrm{e}^{-t\varphi_m(t)}}{\varphi_m(t)}$ tend vers 0 en $+\infty$. On déduit de cet encadrement que $t(a - \varphi_m(t))$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
   Donc $a - \varphi_m(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Version 2 : Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$0 \leq t(a - \varphi_m(t)) = t\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s - \int_0^t \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s\right) = t\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s.$$

Or, par stricte croissante de φ_m et positivité sur $\mathbb{R}_+$, $t\mathrm{e}^{-t\varphi_m(t)} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

$t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ étant intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le critère de Riemann, par comparaison de fonctions positives, $t \longmapsto t\mathrm{e}^{-t\varphi_m(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Comme

$$0 \leq t(a - \varphi_m(t)) \leq \int_t^{+\infty} s\mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s,$$

on en déduit que $t(a - \varphi_m(t)) = \int_t^{+\infty} s\mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Donc $a - \varphi_m(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

7. Comme $at - t\varphi_m(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, on a $\mathrm{e}^{-t\varphi_m(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-at}$. Donc par intégration des équivalents entre fonctions positives intégrables,

$$\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-as}\mathrm{d}s = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}.$$

Comme $a - \varphi_m(t) = \int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\varphi_m(s)}\mathrm{d}s$, on en déduit que

$$a - \varphi_m(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at},$$

soit

$$\varphi_m(t) = a - \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at} + \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-at}).$$