Ex 1

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \longmapsto (X^2-1)P''(X) + (2X+1)P'(X)$$

1) f est diagonalisable.

$\mathcal{B} = (1, \quad , X^n)$

$$f(X^k) = k(k-1)(X^2-1)X^{k-2} + (2X+1)kX^{k-1}$$
$$= \left(k(k-1)+2k\right)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$$

Si $k=0$ $\quad f(1) = 0$

$k>0 \quad f(X^k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & \cdots & f(X^k) & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & & & & 0 \\ 0 & 2 & 2 & & 0 & & \\ & & 2\times 3 & & -k(k-1) & & \\ & & & & k & & 0 \\ & & & & k(k+1) & & -n(n-1) \\ & & & & & & n \\ 0 & & \cdots & & 0 & & n(n+1) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ \\ \\ \\ \\ X^n \end{array}$$

On remarque que $\overset{\lambda_0}{0}, \overset{\lambda_1}{2}, 2\times 3, \dots, \overset{\lambda_n}{n(n+1)}$ sont des valeurs propres :

il existe $Q_k \neq 0$ tel que $f(Q_k) = \lambda_k Q_k$

$(Q_0 \dots Q_n)$ est une famille de $n+1$ vecteurs et $\deg Q_k = k$.

une famille échelonnées et donc une base de vecteurs propres : f est diagonalisable.

2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$) $= E_0 = \mathbb{K}.\underline{1}$.

3) $n=2$;

$f(1)=0$

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A - 2I_3 = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A - 6I_3 = \mathbb{K}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

Ex2 : p projecteur : $E = F \oplus G$ projection sur F parallèlement à G

$$p : \begin{array}{ccc} F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x_F + x_G & \longmapsto & x_F \end{array}$$

avec $x_F \in F$, $x_G \in G$.

$f \in \mathcal{L}(E)$: Montrons que :

$f \circ p = p \circ f \iff f(\operatorname{Ker} p) \subset \operatorname{Ker} p \iff f(G) \subset G$
et
$f(\operatorname{Im} p) \subset \operatorname{Im} p \iff f(F) \subset F$

p a deux valeurs propres : 0 et 1 $\quad E_0 = \operatorname{Ker} p = G$

$E_1 = F$

<u>Propriété très utile du cours</u> : si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $f \circ g = g \circ f$ $_{\text{dig}}$ Alors $\forall \lambda \in \operatorname{Spec} g$, $E_\lambda(g)$ le sous-espace propre associé à la valeur λ est stable par f : car : $\forall x \in E_\lambda(g)$

$$f(g(x)) = g \circ f(x)$$

$$\Rightarrow f(\lambda x) = g(f(x))$$

$$\Rightarrow \lambda f(x) = g(f(x)) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \in E_\lambda(g) \\ \text{ou} \\ f(x) \in E_\lambda(g) \setminus \{0\} \end{cases}$$

d'où $f(E_\lambda(g)) \subset E_\lambda(g)$. $\square$

$\Rightarrow$ c'est la propriété du cours avec $g = p$ et appliquée à E_0 et E_1

$\Leftarrow$ Si $f(F) \subset F$ et $f(G) \subset G$.

$\forall x \in E = F \oplus G \quad x = x_F + x_G$.

$p(x_F + x_G) = x_F \Rightarrow f \circ p(x_F + x_G) = f(x_F)$

$$p \circ f(x_F + x_G) = p(\underset{\in F}{f(x_F)}) + p(\underset{\in G}{f(x_G)})$$

$$= f(x_F) + 0$$

et donc $p \circ f = f \circ p$.

Ex 3 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\quad \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im}(A) = E$.

Montrer que A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A' \in GL_r(\mathbb{K})$ $\quad r \leq n$.

Prenons $(e_1 \dots e_r)$ base de $\operatorname{Im}(A)$

et $(e_{r+1} \dots e_n)$ ——— $\operatorname{Ker} A$.

$\Rightarrow \mathcal{B}(e_1 \quad e_n)$ est une base adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im}(A) \oplus \operatorname{Ker}(A)$

$r = \operatorname{rg} A$.

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_r) & f(e_{r+1}) & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_r \\ e_{r+1} \\ e_n \end{array}$$

$f(e_i) \in \operatorname{Im}(A)$

$i \in [\![1, r]\!]$

$\forall i \in [\![r+1, n]\!]$

$f(e_i) = 0$.

fut l'endomorphisme canoniquement à A.
$A' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $rg\, A' = rg\, A = r$,
donc A' est inversible.

2) La condition : $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A = E$,

$\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$,

car le théorème du rang nous dit
que $\dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A = \dim E$

E de dimension finie :

En général, $\hat{f} : \operatorname{Im}(A) \longrightarrow \operatorname{Im}(A^2)$
$x \longmapsto f(x)$

$\operatorname{Im}(A^2) \subset \operatorname{Im} A$

$f(x) \in \operatorname{Im} A^2$ car $x \in \operatorname{Im} A \Rightarrow x = AY$

$\Rightarrow Ax = f(x) = AAY = A^2 Y \in \operatorname{Im} A^2$

$\tilde{f}$ est toujours surjective :

si $y \in \operatorname{Im} A^2 \Rightarrow \exists x \in E \quad y = f^2(x)$

$\Rightarrow y = f(\underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im} A})$; $\quad y = f(z) \quad z \in \operatorname{Im} A$

En dimension finie :

$\tilde{f}$ est bijective ssi $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A^2$

ssi $\tilde{f}$ est injective

ssi $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\} = \operatorname{Ker} \tilde{f}$

On a montré que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A = E$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^2$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$

Thm du rang.

En général, on a : $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2$.

<u>Ex 4</u> $\dim E = n$ $\quad f \in \mathcal{L}(E)$ $\quad f^2 = -id_E$.

0) montrer que n est impair :

$\det f^2 = \det(-id_E) = (-1)^n = (\det f)^2$

donc $n = 2p$ $\quad p \in \mathbb{N}$.

1) Mq $\forall a \in E\setminus\{0\}$ $\quad (a, f(a))$ est libre.

si $(a, f(a))$ liée et $a \neq 0$ $\Rightarrow$

$\exists \lambda$ $\quad f(a) = \lambda a$. $\qquad f^2(a) = \lambda^2 a$

Mais $f^2 = -\mathrm{id}$ donc $f^2(a) = -a$.

$\Rightarrow \lambda^2 = -1$ absurde, donc $\boxed{(a, f(a)) \text{ libre}}$.

dim $H(a) = 2$.

$F(a) = \mathrm{vect}(a, f(a))$

$f(a) \in F(a)$, et $f(f(a)) = f^2(a) = -a \in F(a)$

$\Rightarrow$ $F(a)$ est stable par f.

<u>Rappel</u> Soit $H = \mathrm{vect}(h_1, \dots, h_r)$. $f(H) \subset H$

ssi $\forall i \in [\![1, r]\!]$ $f(h_i) \in H$.

2) Montrer il existe $a_1 - - a_p$ tels que

$$E = F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_p)$$

Par récurrence on montre que $\forall k \leq p$,

$$F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_k) \; . \; T(k) \, .$$

Initialisation :

$T(1)$: $F(a_1)$ en somme directe.

Si $F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_k)$ et $k < p$

dim $F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_k) = 2k < 2q$

Donc il existe $a_{k+1} \in F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_k)$

$F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_k) \cap F(a_{k+1}) = H$ (*)

H est stable par f car si

$x \in F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_k) \cap F(a_{k+1})$

$f(x) \in F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_k)$ car $\forall i$

$F(a_i)$ stable par f. $\forall i \in [\![1, k]\!]$

et $f(x) \in F(a_{k+1})$ car $F(a_{k+1})$ stable.

s'il existe $\boxed{a \neq 0}$ et $a \in H \Rightarrow (a, f(a))$ libre

mais $F(a) \subset F(a_{k+1}) \Longrightarrow F(a) = F(a_{k+1})$

par dimension.

$\Rightarrow$ (*) $F(a_{k+1}) \subset F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_k)$

Mais $a_{k+1} \notin F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_k)$.

Absurde.

Donc $H = \{0\}$ et

$$F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_k) \oplus F(a_{k+1})$$

Quand $k = 2p$, on a par dimension :

$$E = F(a_1) \oplus \quad \oplus F(a_p)$$

3) Dans la base :

$$(\underbrace{f(a_1), a_1}_{F(a_1)}, f(a_2), a_2, \quad - - \quad , \underbrace{f(a_p), a_p}_{F(a_p)}) = \mathcal{B}$$

$$f_i : \begin{array}{ccc} F(a_i) & \longrightarrow & F(a_i) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \mathcal{B}_i(f(a_i), a_i)$$

$$\mathrm{Mat}_{B_i} f_i = \begin{array}{ccc} f^2(a_i) & f(a_i) & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} f(a_i) \\ a_i \end{array} \end{array}$$

$f^2(a_i) = -a_i$

car $f^2 = -id_E$

$$\Rightarrow \mathrm{Mat}_B f = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & 0 \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{array}{c} f(a_1) \\ a_1 \\ \\ \\ f(a_n) \\ a_n \end{array}$$

⚠ f n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

car $\lambda \in \mathrm{Spec}\, f$; $f^2 = -id \Rightarrow \lambda \neq 0$

si $x \neq 0$ tq $f(x) = \lambda x$ $\quad f^2(x) = \lambda^2 x = -x$

$\Rightarrow \lambda^2 = -1$ impossible dans $\mathbb{R}$;

$\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} f = \emptyset$. $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}} f \subset \{i, -i\}$;