Ex1 $\quad U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

1) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ $\quad \tan x \in [0,1]$.

et donc $(\tan^n x)$ est décroissante

On en déduit que : (U_n) est décroissante

et minorée par 0.

On en déduit que (U_n) CV vers $l \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

$u = \tan x \quad \mathcal{C}^1$.

2) $U_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.
$n \geq 2$.

$du = (1+\tan^2 x) dx$
$= (1+u^2) dx$

$= \int_0^1 u^n \frac{du}{1+u^2}$

$$= \int_0^1 \frac{u^{n-2}(1+u^2)}{1+u^2} - \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{n-1} - u_{n-1}$$

cl : $\forall n \geq 2 \qquad \underbrace{u_{n+1}}_{\to l} = \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{\to 0} - \underbrace{u_{n-1}}_{\to l}$

En passant à la limite : $l = 0 - l$

donc $l = 0$.

c) Convergence dominée :

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}] \qquad |\tan^n x| \leq 1$ intégrable

$x \mapsto \tan^n x \quad \mathcal{C}^0$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

et $(\tan^n x)$ CVS vers $1\!\!1_{\{\frac{\pi}{4}\}}$.

T CVD $\Rightarrow$

$$\lim u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lim_n (\tan^n x)\, dx = 0$$

2) $$\lim_{n \to +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

On pose $f_n : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto n e^{-x^n}$

$|f_n(x)| \leq n e^{-1}$ pas intégrable

On ne peut pas appliquer le théorème donné.

Posons $u = x^n$. $\quad [1, +\infty[\quad [1, +\infty[$

$x \longmapsto x^n$

$du = n x^{n-1} dx = n u^{\frac{n-1}{n}} dx$

est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

$$\int_1^{+\infty} n e^{-x^n}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1-\frac{1}{n}}}\, du = \int_1^{+\infty} u^{\frac{1}{n}} \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

Appliquons le théorème de convergence dominée :

i) $g_n : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. $\mathcal{C}^0$

$$u \longmapsto u^{\frac{1}{n}} \frac{e^{-u}}{u} \xrightarrow{\text{CVS}} \frac{e^{-u}}{u}\ \mathcal{C}^0$$

ii) $\forall x \in [1, +\infty[$

$$|g_n(x)| \leq e^{-u}$$ qui est intégrable

ccl : $\int_1^{+\infty} g_n(u)\, du$ existe. donc $\int_1^{+\infty} n \frac{e^{-x^n}}{x}\, dx$ existe et $\lim\limits_{n} \int_1^{+\infty} \varphi_n(u)\, du = \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} n \frac{e^{-x^n}}{n}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du.}$

3) Hyp $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$.

On pose

i) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$.

$t \longmapsto f(t^n)$

et si $t \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t^n) = f(0)$

$f_n(1) = f(1)$

ii) donc (f_n) CVS vers $f(0)\mathbb{1}_{[0,1[} + f(1)\mathbb{1}_{\{1\}}$.

qui est continue par <u>morceaux</u>.

iii) La fonction f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ donc est bornée car continue sur un segment : $\exists M$ tq $\sup_{[0,1]} f = M$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1]$

$$|f_n(t)| = |f(t^n)| \leq M$$

la fonction constante M est intégrable sur $[0,1]$ et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t^n)\, dt = \int_0^1 f(0) \mathbb{1}_{[0,1[} + f(1) \mathbb{1}_{\{1\}}\, dt$$

$= f(0)'$

Ex 3 $\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$

La fonction gamma.

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! \, n^x}{x(x+1) \quad (x+n)}$$

On pose $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, dt$

0) Vérifions que Γ est définie

$x > 0 \qquad t^{x-1} e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1} \Rightarrow \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ existe

$$t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \Rightarrow t^{x-1}e^{-t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ existe

D'où : Γ existe ; $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est $\mathcal{C}^0$ et ≥ 0

1) $I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)\,dt$

On pose $g_n :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathcal{C}^0$ par

$t \longmapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$, morceaux et même $\mathcal{C}^0$

(g_n) CVS vers $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ $\mathcal{C}^0$.

De plus $g_n(t) = e^{n\ln(1-\frac{t}{n})}\, t^{x-1} \leq e^{-t}\, t^{x-1}$

car $\ln(1+x) \leq x$ et $\forall t\ g_n(t) \geq 0$;

On a bien $\forall t \in]0,1[$ $\quad |g_n(t)| \leq \underbrace{e^{-t}\, t^{x-1}}_{\text{intégrable sur }]1;+\infty[}$

Le théorème de convergence dominée nous dit que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt = \Gamma(x).$$

On pose $u = \frac{t}{n}$ $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

$I_n(x) =$