Ex 1 $\quad \begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+ty} = f(t,y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (E)$

Étude qualitative

$J = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 , \ 1+ty \neq 0 \} \subset \mathbb{R}^2$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \ (t,y) \longmapsto 1+ty \quad \mathcal{C}^0$

$g^{-1}(\mathbb{R}^*) = J$ est un ouvert

$f : J \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^1$

$(t,y) \longmapsto \dfrac{1}{1+ty}$

Théorème de Cauchy-Lipschitz :

$\exists ! \varphi_m : I =]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ solution maximale de E, $0 \in]a, b[$, $\varphi(0) = 0$.

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

2) On pose $\psi(t) = -\varphi_m(-t)$

$\psi :]-b, -a[\longrightarrow \mathbb{R}$ et ψ est solution de E : $\psi(0) = 0$. On en déduit que

$]-b, -a[\subset]a, b[\Rightarrow a = -b$

Donc $I =]-b, b[$ et $\psi = \varphi$

3) $\varphi'_m(t) = \dfrac{1}{1+t\varphi_m(t)}$ Or $\underline{\varphi_m(0)=0}$ donc

$\varphi'_m(0) = 1$ On sait que φ'_m ne s'annule pas sur I donc $\varphi'_m > 0$ sur I.

φ_m est strictement croissante.

4) On veut montrer que $b = +\infty$. $I = \mathbb{R}$. Supposons $b \in \mathbb{R}^*_+$

On sait que $\lim_{b} \varphi_m = \begin{cases} \cancel{+\infty} \\ \ell \end{cases}$ car $\varphi_m \nearrow$. car φ_m bornée

$$\varphi_n' = \frac{1}{1+t\varphi_n(t)} \leq 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \quad \nearrow \text{st}^{(t}$$

$\varphi_n(0)=0 \Rightarrow \varphi > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall t_0 \in]-b,b[\quad t > t_0$

$$\varphi_n(t)-\varphi_n(t_0) = \int_{t_0}^{t} \varphi_n'(s)\,ds \leq t - t_0 \leq b - t_0$$

Donc $\forall\, t \in]t_0, b[$

$$\varphi_n(t) \leq b - t_0 + \varphi_n(t_0)$$

φ_n est bornée D'où $\lim_{b} \varphi_n = l > 0$

car $\varphi(0) > 0$ et strictement croissante

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t\varphi(t)}$$

$(b, l) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to b^-} \varphi'(t) = \frac{1}{1+bl}$$

Le théorème des bouts nous dit que ce n'est pas possible.

Conclusion $b = +\infty$

et $I =]-\infty ; +\infty[$.

5) On veut montrer $\lim_{+\infty} \varphi_m = +\infty$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \geq t_0$.

$$\varphi_m'(t) = \frac{1}{1+t\varphi_m(t)}.$$

$$\ast \quad \int_{t_0}^{t} \varphi_m'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+s\,\varphi_m(s)}\,ds$$

On sait que $\lim\limits_{+\infty} \varphi_m = \begin{cases} +\infty \\ l \end{cases}$ car φ_m est $\nearrow$

Supposons que $\underline{\lim\limits_{+\infty} \varphi_m = l > 0}$ (car $\varphi(0) = 0$ $\nearrow$)

$$\varphi_m(t) - \varphi_m(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+s\,\varphi_m(s)}\,ds$$

Et quand t tend vers $+\infty$:

$$\lim_{+\infty} \varphi_m(t) - \varphi_m(t_0) = l - \varphi_m(t_0) = \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+s\,\varphi_m(s)}\,ds$$

Donc $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{1+s\varphi_m(s)}\,ds$ <u>est convergente</u> mais

l'intégrande : $\displaystyle\frac{1}{1+s\varphi_m(s)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{ls} \geq 0$

et $\frac{1}{ls}$ n'est <u>pas intégrable sur $[t_0, +\infty[$</u>

Absurde.

Et on a bien $\lim\limits_{+\infty} \varphi_m = +\infty$. Et

Comme φ_m est impaire $\lim\limits_{-\infty} \varphi_m = -\infty$.

Le tableau variations de φ_m :

	$-\infty$		0		$+\infty$
φ_m'		$+$	1		
φ_m	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective car strictement monotone.

ψ sa réciproque.

$$\psi'(s) = \frac{1}{\varphi_m'(\psi(s))}$$

On calcule :

Ex2

$$t\,y' = t + y^2 \quad (E).$$

$$y' = 1 + \frac{y^2}{t} \qquad f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t, y) \longmapsto 1 + \frac{y^2}{t}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Thm de C-L : $\exists !$ $]a,b[$ et $\varphi :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

φ solution maximale du problème de Cauchy $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tq $\varphi(t_0) = y_0$.

$$\frac{y'}{t + y^2} = \frac{1}{t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad t_0 > 0,\ t > t_0$$

$$t \in I$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'}{s + \varphi^2(s)}\, ds = \ln \frac{t}{t_0}$$

$\varphi' > 0 \quad \varphi$ est croissante strictement.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(s)}{s+\varphi(s)^2}\,ds \leq \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(s)}{t_0+\varphi(s)}\,ds.$$

$$\left[\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}.\right.$$

$$\ln\frac{t}{t_0} \leq \left[\frac{1}{\sqrt{t_0}}\arctan\frac{s}{\sqrt{t_0}}\right]_{t_0}^{t} \leq \frac{\pi}{\sqrt{t_0}}.$$

donc $\dfrac{t}{t_0} \leq e^{\frac{\pi}{\sqrt{t_0}}} \Rightarrow \underline{t \leq t_0\, e^{\frac{\pi}{\sqrt{t_0}}}}.$

Donc I est majoré $\quad I =]a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$.

$a \in \mathbb{R}_+$

On a bien borné.

2) Étudier les limites en a^+ et b^- ?

Étude en b^- :

On a vu que φ est croissante

$$\lim_{b^-} \varphi = \begin{cases} +\infty \\ \ell \end{cases}$$

Si $\lim_{b^-} \varphi = \ell$, alors $\lim_{b^-} \varphi' = 1 + \frac{\ell^2}{b} \in \mathbb{R}$

$(b, \ell) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Le théorème des bouts nous dit que ce n'est pas possible.

Donc $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$

Étude en a : $\qquad \varphi' = 1 + \frac{\varphi^2}{t}$

→ $a > 0$;

en $\lim_{a^-} \varphi = \begin{cases} -\infty \\ \ell \end{cases}$ car $\varphi \nearrow$:

Si $\lim_{a^-} \varphi = \ell$ alors $\lim_{a^-} \varphi' = 1 + \frac{\ell^2}{a}$.

$(a, \ell) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$;

le théorème des bouts nous dit que ce n'est possible :

<u>Conclusion</u> : $\lim_{a^-} \varphi = -\infty$;

$*$ Si $a = 0$. $\qquad (a, *) \notin \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

$t_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < t < t_0$.

$$\frac{1}{t} = \frac{\varphi'(t)}{t + \varphi^2(t)} \Rightarrow \ln \frac{t_0}{t} = \int_t^{t_0} \frac{\varphi'(s)}{s + \varphi^2(s)} \, ds$$

$$\leq \int_t^{t_0} \frac{\varphi'(s)}{\varphi^2(s)} \, ds = \left[-\frac{1}{\varphi(s)} \right]_t^{t_0} = \frac{1}{\varphi(t)} - \frac{1}{\varphi(t_0)}$$

Si φ ne s'annule pas, on conclut

Si φ s'annule, φ s'annule en unique point t_1 et $t_0 < t_1 \Rightarrow \forall s < t_0 \quad \varphi(s) \neq 0$.

$$\ln \frac{t_0}{t} \leq \frac{1}{\varphi(t)} - \frac{1}{\varphi(t_0)}.$$

$$\lim_{0} \varphi = \begin{cases} -\infty \\ l \end{cases}$$ car φ est $\nearrow$.

$t \to +\infty$

Si $l \neq 0$ $\quad]0, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ se
$\qquad t \longmapsto \frac{1}{\varphi(t)}$

prolonge en 0 par continuité.

Donc $\frac{1}{\varphi}$ est bornée sur $]0, t_0[$.

Mais $\ln \frac{t_0}{t}$ tend vers $+\infty$ en 0^+.

Donc $l = 0$.

$\lim\limits_{0^+} \varphi = 0$.

<u>Ex 3</u> $\begin{cases} y' = e^{-ty} = f(t,y) & \mathbb{R}^2, \ \mathcal{C}^1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

1) Thm C-L : $\exists ! \ \varphi_m :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$, solution maximal.

2) $\psi = -\varphi_m(-t)$ ψ est solution sur $]-\beta, -\alpha[\subset]\alpha, \beta[$ car φ_m solution maximale

$]\alpha, \beta[=]-\alpha, \alpha[= I$

3) $\varphi_m'(t) = e^{-t\varphi_m(t)} > 0$

donc φ_m est strictement croissante

$$\lim_{\alpha^-} \varphi_m = \begin{cases} +\infty \\ \ell \end{cases}$$

$t_0 > 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad \varphi(t) \geq \underbrace{\varphi(t_0)}_{=\delta} > \varphi(0) = 0$

$$\varphi'(t) = e^{-t\varphi_m(t)}$$

On intègre :

$$\varphi_m(t) - \varphi_m(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-s\varphi_m(s)}\,ds \leq \int_{t_0}^{t} e^{-\delta s}\,ds$$

$$\varphi_m(t) - \varphi_m(t_0) \leq \left[- \frac{e^{-\delta s}}{\delta} \right]_{t_0}^{t} = \frac{e^{-\delta t_0}}{\delta} - \frac{e^{-\delta t}}{\delta}.$$

$$\varphi_m(t) \leq \frac{e^{-\delta t_0}}{\delta} + \varphi_m(t_0)$$

Donc $\lim\limits_{\alpha^-} \varphi_m = a$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\alpha^-} \varphi_m = a$ $\lim\limits_{\alpha^-} \varphi_m' = e^{-\alpha a}$

Le théorème des bouts nous dit que c'est impossible $(\alpha, a) \in \mathbb{R}^2$.

Donc $\ell = +\infty$ et $\lim_{+\infty} \varphi_n = a$

On a répondu à 3) et 4).

5) Montrer que $a > 1$. $a > 0$.

On a $a = \int_0^{+\infty} \varphi_n'(s)\, ds = \int_0^{+\infty} e^{-s\varphi(s)}\, ds$

Mais φ strictement croissante ; $\varphi(0) = 0$

$\forall s \in \mathbb{R}_+^*$ $\varphi(s) < a$

$$a < \int_0^{+\infty} e^{-sa}\, ds = \left[\frac{e^{-sa}}{a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 < 1$$

Ex 6-7 :

$$\varphi'(s) = e^{-s\varphi(s)}$$

si $\lim\limits_{+\infty} \varphi = a > 1$,

$$\underline{a - \varphi_m(t)} = \int_t^{+\infty} \varphi_m'(s)\,ds = \int_t^{+\infty} e^{-s\varphi_m(s)}\,ds$$

l'idée $\varphi(s) \underset{+\infty}{\sim} a$ $\boxed{\underline{\underline{\text{si}}} \quad e^{-s\varphi(s)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-sa}}$

fonctions positives :

$$\int_t^{+\infty} e^{-s\varphi(s)}\,ds \underset{+\infty}{\sim} \int_t^{+\infty} e^{-sa}\,ds = \left[-\frac{e^{-sa}}{a}\right]_t^{+\infty}$$

$$= \frac{e^{-ta}}{a}.$$

$$a - \varphi_m(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-ta}}{a} \Rightarrow a - \varphi_m(t) = \frac{e^{-ta}}{a} + o\left(e^{-ta}\right)$$

car $u \sim_b v \Leftrightarrow u - v =_b o(u)$.

et donc $\varphi_m(t) = a - \frac{1}{a} e^{-ta} + o\left(e^{-ta}\right)$.

Mais il reste à montrer

$$e^{-s\varphi(s)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-sa} \Leftrightarrow e^{s(a-\varphi(s))} \xrightarrow[s \to +\infty]{} 1$$

On veut montrer que $s(a-\varphi(s)) \xrightarrow[s \to +\infty]{} 0$

$\forall t > 0 \quad \varphi \nearrow ,$

$$0 \leq t\,(a-\varphi(t)) = t\left(\int_0^{+\infty} \varphi'(s)\,ds - \int_0^t \varphi'(s)\,ds\right)$$

$$= t \int_t^{+\infty} e^{-s\varphi(s)}\,ds \qquad \text{car } \varphi \nearrow$$

$$\leq t \int_t^{+\infty} e^{-s\cancel{a}\,\varphi(t)} = t\,\frac{e^{-t\cancel{a}\,\varphi(t)}}{\cancel{a}\,\varphi(t)}$$

$$\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 ,$$

d'où $\quad d - \varphi(t) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t}\right)$