TD 6 - Algèbre 1 - Géométrie 1

Hors TD.

1. $33 = 1 \times 28 + 5$
$28 = 5 \times 5 + 3$
$5 = 3 \times 1 + 2$
$3 = 2 \times 1 + 1$
$2 = 2 \times 1 + 0$

$\mathrm{pgcd}(33, 28) = 1$.

$33 = 3 \times 11$
$28 = 2 \times 14 = 2^2 \times 7$.

$\mathrm{pgcd}(a,b) \times \mathrm{ppcm}(a,b) = |a||b|$

$\mathrm{ppcm}(33, 28) = 33 \times 28$.

2.

1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ \underline{300} & 105 \\ 15 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ \underline{90} & 35 \\ 15 & \end{array}$$

Donc $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 \times 7$.

$55 = 5^1 \times 11$. Donc $\mathrm{pgcd}(1260, 55) = 5^1 = 5$

$\mathrm{ppcm}(1260, 55) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 13\,860$.

3. a) Faux. $d = 8$, $d \mid 24 = \underset{a}{6} \times \underset{b}{4}$. On a $8 \nmid 6$ mais 8 ne divise pas 4.

Faux

b) Si $d = \mathrm{pgcd}(a,b)$ alors $d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, comme $d \in d\mathbb{Z}$,
$d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ donc $d = au + bv$ avec $u, v \in \mathbb{Z}^2$.

- Si $d = au + bv$ alors on ne peut pas dire que $d = \mathrm{pgcd}(a,b)$. Faux

(Sauf si $d = 1$ et alors il s'agit du théorème de Bezout).

Si $d = au + bv$ alors comme $\mathrm{pgcd}(a,b) \mid a$ et $\mid b$, on a
$\mathrm{pgcd}(a,b) \mid au + bv = d$.

Par exemple, $\underset{d}{4} = \underset{a}{8} \times 2 + \underset{b}{6} \times (-2)$ et $\mathrm{pgcd}(8,6) = 2$.

Vrai.

c) - Si $42 \mid n$ alors $n = 42 \times k$ où $k \in \mathbb{Z}$,
donc $n = 6 \times 7 \times k$ donc $6 \mid n$ et $7 \mid n$.

- Si $6 \mid n$ et $7 \mid n$ alors parce que 6 et 7 sont premiers entre eux,
alors $6 \times 7 = 42 \mid n$.

d) Faux si $48 \mid n$ alors $6 \mid n$ et $8 \mid n$.

Mais $6 \mid 24$ et $8 \mid 24$ mais $48 \nmid 24$.

⚠ 6 et 8 ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 3

$-\overline{a} = -1 \times \overline{a} = \overline{-1} \times \overline{a}$
$= \overline{-1 \times a}$
$= \overline{-a}$.

1. $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. $\overline{3}x + \overline{5} = \overline{0}$ ssi $\overline{3}x = -\overline{5} = \overline{-5} = \overline{5}$ $\quad (-5 \equiv 5 [10])$

3 et 10 sont premiers entre eux donc $\overline{3}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. On a $10 = 3 \times 3 + 1$, donc $1 = \underbrace{10}_{a} \times 1 + \underbrace{3}_{b} \times (-3)$

Donc l'inverse de $\overline{3}$ $(\overline{3}^{-1})$ est $\overline{-3}$, $\quad \overline{1} = \overline{3} \times \overline{-3}$

soit $\overline{-3} = \overline{7}$ $\quad (-3 \equiv 7 [10])$

Donc $\overline{3}x + \overline{5} = \overline{0}$ ssi $\underbrace{\overline{7} \times \overline{3}}_{\overline{1}} x = \overline{7} \times \overline{5}$

$35 \equiv 5 [10]$.

ssi $x = \overline{35} = \overline{5}$.

Donc l'équation admet une unique solution $\overline{5}$.

2. $5x \equiv 3 \mod 28$. $\quad \overline{5}\,\overline{x} = \overline{3}$ dans $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$.

5 et 28 sont premiers entre eux, donc | 5 est inversible modulo 28
| $\overline{5}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$

$28 = 1 \times 28 + 0 \times 5$
$5 = 0 \times 28 + 1 \times 5$
$3 = 1 \times 28 - 5 \times 5$
$2 = -1 \times 28 + 6 \times 5$
$1 = 2 \times 28 - 11 \times 5$.

Donc l'inverse de $\overline{5}$ dans $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ est $\overline{-11} = \overline{17}$.

Donc on a $5x \equiv 3 [28]$ ssi $x \equiv 51 [28]$

ssi $x \equiv 23 [28]$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$S = \{ 23 + 28 \times k,\ k \in \mathbb{Z} \}$.

Exercice 4

1. Par l'algorithme d'Euclide,

$53 = 20 \times 2 + 13$
$20 = 13 \times 1 + 7$
$13 = 7 \times 1 + 6$
$7 = 6 \times 1 + 1$
$6 = 6 \times 1 + 0$

Donc $\mathrm{pgcd}(20, 53) = 1$.

• Recherche d'une solution particulière (x_0, y_0). On cherche la relation de Bezout entre 20 et 53.

$53 = 1 \times 53 + 0 \times 20$
$20 = 0 \times 53 + 1 \times 20$
$13 = 1 \times 53 - 2 \times 20$
$7 = -1 \times 53 + 3 \times 20$
$6 = 2 \times 53 - 5 \times 20$
$1 = -3 \times 53 + 8 \times 20$

Donc en multipliant par 3, on obtient $3 = -9 \times 53 + 24 \times 20$,

soit $20 \times 24 - 53 \times 9 = 3$.

Donc $(x_0, y_0) = (24, 9)$ est une solution particulière de l'équation.

• Recherche de l'ensemble des solutions.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Alors (x, y) est solution de $20x - 53y = 3$

ssi $20x - 53y = 20x_0 - 53y_0$

ssi $20(x - x_0) = 53(y - y_0)$ $(*)$

Donc $20 \mid 53(y - y_0)$. Or 20 et 53 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, $20 \mid y - y_0$. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - y_0 = 20k$, soit $y = y_0 + 20k$.

En remplaçant dans $(*)$, on a $20(x - x_0) = 53 \times 20k$,

donc $x - x_0 = 53k$, soit $x = x_0 + 53k$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(x_0 + 53k, y_0 + 20k)$ est solution de l'équation : $20 \times (x_0 + 53k) - 53(y_0 + 20k) = 20x_0 - 53y_0 = 3$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \{ (24 + 53k,\ 9 + 20k),\ k \in \mathbb{Z} \}.$$

2. • On calcule $\mathrm{pgcd}(162, 207)$. Par l'algorithme d'Euclide,

$$207 = 162 \times 1 + 45$$
$$162 = 45 \times 3 + 27$$
$$45 = 27 \times 1 + 18$$
$$27 = 18 \times 1 + 9$$
$$18 = 9 \times 2 + 0$$

$$\begin{array}{r|l} 162 & 45 \\ 135 & 3 \\ \hline 27 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 162 & 9 \\ 90 & 18 \\ \hline 72 & \end{array}$$

Donc $\mathrm{pgcd}(207, 162) = 9$ et $9 \mid 27$.

Donc $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de $162x + 207y = 27$ ssi

(x,y) est solution de $18x + 23y = 3$.

$$\begin{array}{r|l} 207 & 9 \\ 180 & 23 \\ \hline 27 & \end{array}$$

• Recherche d'une solution particulière (x_0, y_0). On cherche la relation de Bezout entre 18 et 23.

$$23 = 1 \times 23 + 0 \times 18$$
$$18 = 0 \times 23 + 1 \times 18$$
$$5 = 1 \times 23 - 1 \times 18$$
$$3 = -3 \times 23 + 4 \times 18$$
$$2 = 4 \times 23 - 5 \times 18$$
$$1 = -7 \times 23 + 9 \times 18.$$

Donc en multipliant par 3, on obtient $3 = -21 \times 23 + 27 \times 18$,

soit $18 \times 27 + 23 \times (-21) = 3$

Donc $(x_0, y_0) = (27, -21)$ est une solution particulière de l'équation.

• Recherche de l'ensemble des solutions de $18x + 23y = 3$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Alors (x,y) est solution de $18x + 23y = 3$

ssi $18x + 23y = 18x_0 + 23y_0$

ssi $18(x - x_0) = 23(y_0 - y)$ $(*)$

Donc $18 \mid 23(y_0 - y)$. Or 18 et 23 sont premiers entre eux,

donc, d'après le théorème de Gauss, $18 \mid y_0 - y$. Donc il existe

$k \in \mathbb{Z}$ tel que $y_0 - y = 18k$, soit $y = y_0 - 18k$.

En remplaçant dans $(*)$, on a $18(x - x_0) = 23 \times 18k$,

soit $x - x_0 = 23k$, soit $x = x_0 + 23k$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, (x_0+23k, y_0-18k) est solution de l'équation : $18\times(x_0+23k)+23(y_0-18k) = 18x_0+23y_0 = 3$.

Donc l'ensemble des solutions de $18x+23y=3$, et donc de $162x+207y=27$ est

$$S=\{(27+23k, -21-18k),\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ solution de $x^3+5=117y^3$.

$$\begin{array}{r|l} 117 & 9 \\ 27 & 13 \end{array}$$

On a $9 \mid 117$ donc $117 \equiv 0\,[9]$, et donc $117y^3 \equiv 0\,[9]$

Donc $x^3+5 \equiv 0\,[9]$, soit $x^3 \equiv -5\,[9]$, soit encore $x^3 \equiv 4\,[9]$

Or on a :

$0^3 \equiv 0\,[9]$,
$1^3 \equiv 1\,[9]$,
$2^3 \equiv 8\,[9]$,

$3^3 \equiv 0\,[9]$
$4^3 \equiv 1\,[9]$
$5^3 \equiv (-4)^3\,[9]$
$\equiv (-1)^3 4^3\,[9]$
$\equiv -1\,[9]$
$\equiv 8\,[9]$

$6^3 \equiv (-3)^3\,[9]$
$\equiv 0\,[9]$
$7^3 \equiv (-2)^3\,[9]$
$\equiv -1\times 8\,[9]$
$\equiv 1\,[9]$

$8^3 \equiv (-1)^3\,[9]$
$\equiv 8\,[9]$

Comme $x \equiv a\,[9]$ avec $a\in\{0..8\}$ et $a^3 \not\equiv 4\,[9]$, la relation $x^3\equiv 4\,[9]$ est impossible.

Donc $x^3+5=117y^3$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 5

$\begin{cases} x_1 \equiv 1 \, [10] \\ x_1 \equiv 0 \, [13] \end{cases}$ et $\begin{cases} x_2 \equiv 0 \, [10] \\ x_2 \equiv 1 \, [13] \end{cases}$

1. Les entiers 10 et 13 sont premiers entre eux. On cherche la relation de Bezout entre 10 et 13 :

$$13 = 1 \times 13 + 0 \times 10$$
$$10 = 0 \times 13 + 1 \times 10$$
$$3 = 1 \times 13 - 1 \times 10$$
$$1 = -3 \times 13 + 4 \times 10.$$

Donc en prenant $x_1 = -3 \times 13 = -39$, on a $\begin{cases} x_1 \equiv 1 \, [10] \\ x_1 \equiv 0 \, [13] \end{cases}$.

et en prenant $x_2 = 4 \times 10 = 40$, on a $\begin{cases} x_2 \equiv 0 \, [10] \\ x_2 \equiv 1 \, [13] \end{cases}$.

Donc $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \equiv 2 \, [10] \\ 2x_1 + 5x_2 \equiv 5 \, [13] \end{cases}$

Donc $x_0 = 2 \times x_1 + 5 x_2 = 2 \times (-39) + 5 \times 40 = 122$ est une solution du système de congruences.

D'après le cours, l'ensemble des solutions est donc

$$S = \{122 + 10 \times 13 \times k, \, k \in \mathbb{Z}\} = \{122 + 130k, \, k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Les entiers 17, 11 et 6 sont premiers entre eux 2 à 2.

$\begin{cases} x_1 \equiv 1 \, [17] \\ x_1 \equiv 0 \, [11] \\ x_1 \equiv 0 \, [6] \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 \equiv 0 \, [17] \\ x_2 \equiv 1 \, [11] \\ x_3 \equiv 0 \, [6] \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 \equiv 0 \, [17] \\ x_3 \equiv 0 \, [11] \\ x_3 \equiv 1 \, [6] \end{cases}$

Puis $3x_1 + 4x_2 + 5x_3$.

Posons $n_1 = 17$ et $N_1 = 11 \times 6 = 66$.

Alors n_1 et N_1 sont premiers entre eux.

On cherche une relation de Bezout entre 17 et 66.

$$\begin{array}{r|l} 66 & 17 \\ \underline{51} & 3 \\ 15 & \end{array}$$

$\times 1$ $\quad 66 = 1 \times 66 + 0 \times 17$

$\times(-3)$ $\quad 17 = 0 \times 66 + 1 \times 17$

$$15 = 1 \times 66 - 3 \times 17$$
$$2 = -1 \times 66 + 4 \times 17$$
$$1 = 8 \times 66 - 31 \times 17.$$

Donc en prenant $x_1 = 8 \times 66 = 528$ $= 8 \times 6 \times 11$, on a $\begin{cases} x_1 \equiv 1 \, [17] \\ x_1 \equiv 0 \, [11] \\ x_1 \equiv 0 \, [6] \end{cases}$.

Posons $m_2 = 11$ et $\Pi_2 = 17 \times 6 = 102$. On a m_2 et Π_2 premiers entre eux.

$$x_2 \equiv 0 \ (17)$$
$$\equiv 1 \ (11)$$
$$\equiv 0 \ (6)$$

$$102 = 1 \times 102 + 0 \times 11$$
$$11 = 0 \times 102 + 1 \times 11$$
$$3 = 1 \times 102 - 9 \times 11$$
$$2 = -3 \times 102 + 28 \times 11$$
$$1 = 4 \times 102 - 37 \times 11$$

En prenant $x_2 = 4 \times 102 = 408 = 4 \times 17 \times 6$, on a $\begin{cases} x_2 \equiv 0 \ (17) \\ x_2 \equiv 1 \ (11) \\ x_2 \equiv 0 \ (6) \end{cases}$.

- Posons $m_3 = 6$ et $\Pi_3 = 17 \times 11 = 187$. Alors m_3 et Π_3 sont premiers entre eux.

$$\begin{array}{r|l} 187 & 6 \\ \hline 180 & 31 \\ 7 & \\ 1 & \end{array}$$

$\times 1$ $\quad 187 = 1 \times 187 + 0 \times 6$

$\times(-31)$ $\quad 6 = 0 \times 187 + 1 \times 6$

$$1 = 1 \times 187 - 31 \times 6$$

En prenant $x_3 = 187 = 17 \times 11$, on a $\begin{cases} x_3 \equiv 0 \ (17) \\ x_3 \equiv 0 \ (11) \\ x_3 \equiv 1 \ (6) \end{cases}$.

- Finalement $x_0 = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \times 528 + 4 \times 408 + 5 \times 187 = 4151$ est une solution du système

$$\begin{cases} x \equiv 3 \ (17) \\ x \equiv 4 \ (11) \\ x \equiv 5 \ (6) \end{cases}.$$

- En conclusion, l'ensemble des solutions de ce système est

$$S = \{ x_0 + 17 \times 11 \times 6 \times k \mid k \in \mathbb{Z} \}$$
$$= \{ 4151 + 1122k \mid k \in \mathbb{Z} \}$$
$$= \{ 785 + 1122k' \mid k' \in \mathbb{Z} \}$$

$$\begin{array}{r|l} 4151 & 1122 \\ \hline 3366 & 3 \\ 785 & \end{array}$$