Feuille de TD n^o 7

Dénombrement, anneaux et corps.

21 décembre 2020

1 Dénombrement

Exercice 1. Soient A et B deux parties de E et F. Soit f une application de E dans F. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.
2. Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.
3. Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
4. Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F.

Exercice 2.

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « ABRACADABRA » ?
2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 3. Une urne contient 10 boules rouges numérotées de 1 à 10, 10 boules jaunes numérotées de 1 à 10, 10 boules bleues numérotées de 1 à 10 et 10 boules vertes numérotées de 1 à 10. On tire simultanément sans remise 5 boules dans l'urne. *On ne cherchera pas la valeur numérique des résultats.*

1. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement une boule numérotée 1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement trois boules rouges ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement deux boules jaunes et deux boules bleues ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins deux boules vertes ?
5. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule numérotée 5 et deux boules jaunes ?

Exercice 4. Soit E un ensemble à n éléments.

1. (a) Soit X une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties Y de E telles que $X \cap Y = \emptyset$?
   (b) Combien y a-t-il de couples (X,Y) formés de parties disjointes de E (ie telles que $X \cap Y = \emptyset$) ?
2. Combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties de E tels que $Y \subset X$?

Exercice 5. On note S_n^p le nombre de surjections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$ avec $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Déterminer les nombres suivants :

$$S_n^p \text{ pour } p > n, \quad S_n^n, \quad S_n^1, \quad S_n^2 \quad \text{et} \quad S_{n+1}^n.$$

2 Anneaux

Exercice 6. Donner l'ensemble G des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. Montrer que $(G,\times)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$

Exercice 7. On pose $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On pose

$$\mathbb{Z}[j] := \{a + jb \in \mathbb{C}/(a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

On U l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[j]$.

1. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
2. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
3. Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$. Montrer que $z \in U \Leftrightarrow |z| = 1$
4. Soit $z = a + jb \in \mathbb{Z}[j]$. Montrer que $z \in U \Rightarrow (a,b) \in \{-1,0,1\}^2$
5. En déduire l'ensemble U.

3 Corps

Exercice 8. Soient $A = \{a+b\sqrt{7}, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$ et $B = \{a+b\sqrt{11}, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$.

1. Démontrer que A et B sont des sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. Montrer que l'application de A dans B définie par : $\varphi : a + b\sqrt{7} \longmapsto a + b\sqrt{11}$ est un morphisme de groupes mais n'est pas un morphisme de corps (calculer $\varphi(\sqrt{7} \times \sqrt{7})$).

Exercice 9. Soit $M = \{aI_2 + bJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ et $aI_2 + bJ = O$ alors $a = b = 0$.
2. Montrer que, muni des lois usuelles sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, M est un anneau. Cet anneau est-il commutatif, intègre ?
3. M est-il un corps ?
4. Que peut-on dire si on remplace $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $M = \{aI_2 + bJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$