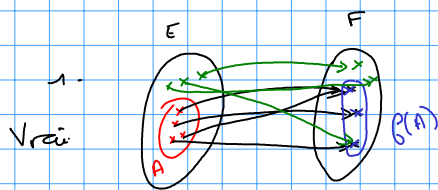


TD 7. Algèbre 1 - Géométrie 1

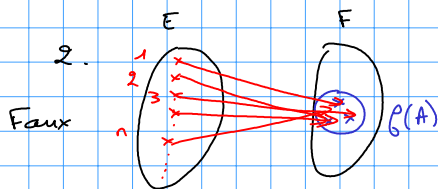
Exercice 1



$$\text{card } f(A) \leq \text{card } A$$

$$A = \{x_1, \dots, x_n\}$$

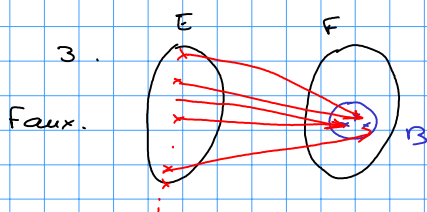
$$f(A) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$$



$$A = \mathbb{Z} = \mathbb{N}, \quad F = \mathbb{N}, \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 0$$

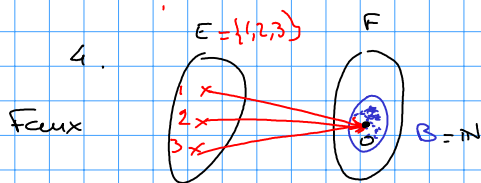
$$\text{Im } f = f(A) = \{f(n), n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$$



Prendre le même contre-exemple.

$$B = \{0\} \quad f^{-1}(B) = \{n \in \mathbb{N}, f(n) = 0\}$$

$$= \mathbb{N}.$$



$$B = F = \mathbb{N}, \quad A = E = \{1, 2, 3\}$$

$$f: \begin{array}{l} 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 0 \\ 3 \mapsto 0 \end{array}$$

$$f: \{1\} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$1 \mapsto 0$$

$$f^{-1}(\mathbb{N}) = \{1\}.$$

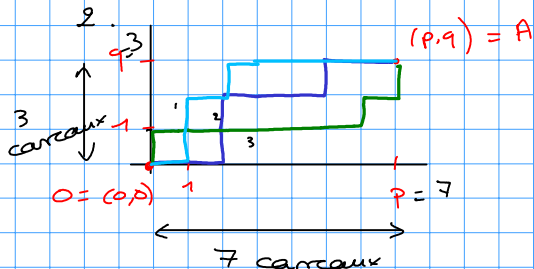
$$f^{-1}(B) = \{n \in E \mid \underbrace{f(n)}_{=0} \in B\}$$

$$= E = \{1, 2, 3\} \quad \text{et bien}$$

mais B est infini.

Exercice 2

1. Voir cours 14.



On se déplace de p carreaux vers la droite
et on se déplace de q carreaux vers le
haut. Au total, on se déplace de $p+q$
carreaux.
Un chemin : 1^{er} étape : soit D, soit H
2^{ème} étape : soit D, soit H

$$C = (\begin{matrix} D & D \\ H & H \end{matrix} , \dots)$$

$$(H, H, H, D, D, \dots D)$$

Un chemin peut être représenté par une
liste de $p+q$ lettres, les lettres
D et H, la lettre D doit apparaître
 p fois et la lettre H doit apparaître
 q fois.

$$(D, H, D, D, \dots H, D)$$

$\xleftarrow{p+q} \xrightarrow{\hspace{1cm}}$

Par exemple, on choisit les p positions de
la lettre D

Il y a $\binom{p+q}{p}$ choix possibles.

ou on choisit les q positions de H : $\binom{p+q}{q}$ choix possibles.

$$(\text{appel: } \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}) \quad \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{p+q-p} = \binom{p+q}{q}$$

Exercice 3



40 boules

Ici : pas de répétition et l'ordre n'importe pas

1. On a 4 boules n° 1.

$$\binom{4}{1} \times \binom{36}{4}$$

0 0 0 0 0
↑
1

2.

$$\binom{10}{3} \times \binom{30}{2}$$

• • • 0 0

3.

$$\binom{10}{2} \times \binom{10}{2} \times \underbrace{\binom{20}{1}}_{20}$$

• • • • 0

4. On passe au complémentaire :

• • • • 0

on tire 0 boule verte $\binom{30}{5}$ ou on tire exactement 1 boule

verte $\binom{10}{1} \times \binom{30}{4}$.

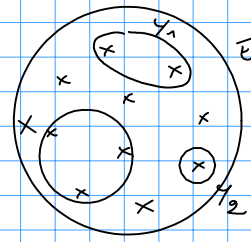
Donc le nombre de tirages contenant au moins 2 boules vertes :

$$\binom{40}{5} - \binom{30}{5} - \binom{10}{1} \times \binom{30}{4}$$

5.

Exercice 4

$\text{card } E = n$.



$$1. a) Y \cap X = \emptyset \text{ ssi } Y \subset E \setminus X \text{ ssi } Y \in \mathcal{P}(E \setminus X) \\ = \mathcal{P}(E \setminus X)$$

or $\text{card}(E \setminus X) = \text{card } E - \text{card } X = n - p$ et $\text{card } \mathcal{P}(E \setminus X) = 2^{n-p}$.

Donc il y a 2^{n-p} parties Y de E telles que $X \cap Y = \emptyset$.

b) On veut déterminer $\text{card} \{(x, y) \in \mathcal{P}(E)^2, x \cap y = \emptyset\}$

$$\text{On a } A = \bigcup_{p=0}^n \underbrace{\{(x, y) \in \mathcal{P}(E)^2, x \cap y = \emptyset \text{ et } \text{card } X = p\}}_{A_p}.$$

Donc $\text{card } A = \sum_{p=0}^n \text{card } A_p$ car les A_p sont 2 à 2 disjoints.

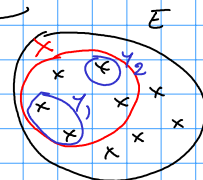
Soit $p \in \{0 \dots n\}$. Il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles X de cardinal p puis il y a 2^{n-p} possibilités pour Y tel que $X \cap Y = \emptyset$.

$$\text{Donc } \text{card } A_p = \binom{n}{p} \times 2^{n-p}.$$

$$\text{Donc } \text{card } A = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^{n-p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^p 2^{n-p} = (1+2)^n = 3^n.$$

2. On veut déterminer $\text{card} \{(x, y) \in \mathcal{P}(E)^2, y \subset x\}$.

$$A = \bigcup_{p=0}^n \underbrace{\{(x, y) \in \mathcal{P}(E)^2, y \subset x \text{ et } \text{card } X = p\}}_{A_p}.$$



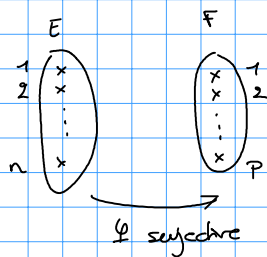
On a $\text{card } A = \sum_{p=0}^n \text{card } A_p$ car les A_p sont 2 à 2 disjoints.

Soit $p \in \{0 \dots n\}$. Il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles pour X de cardinal p puis pour X de cardinal p fixé, il y a 2^p choix possibles pour Y tel que $Y \subset X$ ($Y \in \mathcal{P}(X)$ et $\text{card } \mathcal{P}(X) = 2^p$).

$$\text{Donc } \text{card } A_p = \binom{n}{p} \times 2^p.$$

$$\text{Donc } \text{card } A = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p \times 1^{n-p} = (2+1)^n = 3^n.$$

Exercice 5



1. S_n^p avec $p > n$

Il n'y a pas d'applications surjectives de $\{1..n\}$ dans $\{1..p\}$

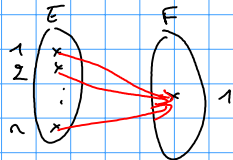
Donc $S_n^p = 0$.

2. S_n^n avec $p = n$

$\text{card } E = \text{card } F = n$ donc une application est surjective ssi elle

est bijective. $S_n^n = \text{Bij}(E, F) = S(E) = n!$
(car $E = F$)

3. S_n^1 avec $p = 1$



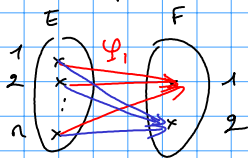
Il existe une unique application de $\{1..n\}$ dans $\{1\}$,
c'est l'application constante égale à 1 :

$$\forall k \in \{1..n\}, \varphi(k) = 1.$$

Cette application est surjective car $\text{Im } \varphi = \{1\} = F$

Donc $S_n^1 = 1$.

4. S_n^2 pour $p = 2$



$S_n^2 =$ nbre d'applications de E dans F

— nbre d'applications non surjectives de E
dans F

$$\mathcal{F}(E, F) = \text{card } F^{\text{card } E} = 2^n$$

Soit $\varphi : E \rightarrow F$ non surjective. Alors $\text{Im } \varphi \neq \{1, 2\}$,

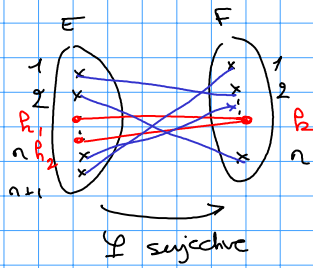
donc $\text{Im } \varphi = \{1\}$ ou $\text{Im } \varphi = \{2\}$.

(1 ou 2 n'a pas d'antécédent par φ),

Donc φ est l'application constante égale à 1 ou égale à 2.

$$\text{Donc } S_n^2 = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1).$$

$$5. \sum_{i=1}^n$$



$$\text{Im } \phi = \{1, \dots, n\}$$

$$\binom{n+1}{2} \times n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 1$$

$$\binom{n}{1}$$

$$= \frac{(n+1)!}{2 \times (n-1)!} n! = \frac{(n+1)!}{2} n$$