

Bilan Algèbre 1.

Chap 1. Ensembles. Pour montrer que $A = B$,

① $A \subset B$ puis ② $B \subset A$.

ou Si A et B sont finis : ① $A \subset B$ et ② $\text{card } A = \text{card } B$.

Chap 2. Applications. Image directe, image réciproque.

• Injectives, surjectives et bijectives. (+ composée $f \circ g$

$$\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{bijectives}}}{f \circ g} \right)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1})$$

• Si $f: E \rightarrow F$ avec E et F finis et $\text{card } E = \text{card } F$

alors f injective ssi f surjective ssi f bijective.

Par exemple, on montre que f est injective (ou surjective)

puis on dit que $\text{card } E = \text{card } F < +\infty$ donc f est bijective.

Chap 3. Relations.

↳ relat° d'équivalence : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

↳ relat° d'ordre.

En pratique, on utilise surtout $\leq$ sur $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

bornes inf, sup, ^{majoré $\exists A$} maximum et ^{minoré $\exists A$} minimum.

existe si $A \subset \mathbb{R}$ non vide ^{majoré} $\leftarrow$ $\rightarrow$ existe si $A \subset \mathbb{R}$ non vide ^{minoré}

Si on est avec $(\leq, \mathbb{R})$, connaître les caractérisations des

bornes sup et inf (pr les exercices pratiques)

et les définitions (pr les exercices théoriques)

Chap 4. Arithmétique.

diviseur, multiple, division euclidienne,

congruences et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$a \equiv b [n]$ ssi $n \mid a - b$ ssi a et b ont le même reste ds la division eucl. par n . ssi $a = \bar{b}$ (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

Si $a = r(n)$ avec $0 \leq r < n$ alors r est le reste de la division euclidienne de a par n : $a = qn + r$

. PGCD et PPCM.

↳ connaître la caractérisation : $d|a$ et $d|b$

si $d'|a$ et $d'|b$ alors $d'|d$

$$: d = \text{pgcd}(a, b)$$

Si $d'|a$ et $d'|b$ alors $d' | \text{pgcd}(a, b)$, donc $\text{pgcd}(a, b) \geq d'$.

→ Algo. d'Euclide

. Nombres premiers entre eux : $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

si $d|a$ et $d|b$ alors $d|1$.

Bezout. a et b sont premiers entre eux ssi $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$au + bv = 1.$$

|| Savoir déterminer cette relation : algo d'Euclide étendu.

$$6 \text{ et } 5 : 6 \times 1 + 5 \times (-1) = 1.$$

Gauss. Si $a|bc$ et $a \wedge b = 1$ alors $a|c$.

Nombres premiers, $p|ab$ avec p premier alors $p|a$ ou $p|b$.

Décomposition en produit de facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \text{ avec les } p_i \text{ nombres premiers 2 à 2}$$

$$n = p_2 \times \underbrace{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_r^{\alpha_r}}_{p_2 | n} \text{ donc } p_2 \text{ distincts.}$$

Les diviseurs de n sont $p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$ avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

. a et b sont premiers entre eux ssi ils n'ont pas de

facteurs premiers en commun.

(si $p|a$ et $p|b$ alors $p | \text{pgcd}(a, b)$ donc $\text{pgcd}(a, b) > 1$).

→ Applications

↳ Equat' diophantiennes $ax + by = c$

↳ Equations modulo un entier

↳ Trouver l'inverse de $\bar{a}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

$$a \odot n v = 1 \quad \bar{a}^{-1} = \bar{u}.$$

↳ Thm des restes chinois.

Chap 5. Dénombrément.

• $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ avec les E_i 2 à 2 disjoints

$\text{card } E = \sum_{i=1}^n \text{card } E_i$,

• Tirage successif avec remise

↓
liste

(répétitions et ordre)

• Tirage successif sans remise

↓
arrangement

(il n'y a pas de répétition
et l'ordre compte)

• Tirage simultané

↓
combinaison.

• Déf d'un ensemble dénombrable.