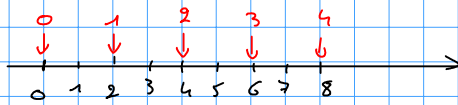


3. Ensembles dénombrables



$$\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \frac{n}{2}$$

$$\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$$

$$n \mapsto 2n$$

$$n = 2^{\alpha_1} \underbrace{3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}}_{\text{impair}} = 2^{\alpha_1} \times (2p+1)$$

Prop 53. $\Leftarrow \varphi: A \rightarrow B \subset \mathbb{N}$ bijection.

• 1^{er} cas: A est fini.

• 2nd cas: A est infini. B est infini. Donc B est dénombrable:

$\varphi_1: B \rightarrow \mathbb{N}$ bijective. $\varphi_1 \circ \varphi: A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{N}$ est bijective.

Donc A est dénombrable.

$\Rightarrow$ On sup...

• 1^{er} cas: A est dénombrable. A est en bijection avec $\mathbb{N}$.

• 2nd cas: A est fini: $\varphi: A \rightarrow \{1 \dots n\} \subset \mathbb{N}$ bijective.

• Si $\varphi(p_1, q_1) = \varphi(p_2, q_2)$ alors $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$ avec $p_1 \wedge q_1 = 1$, $q_2 \wedge p_2 = 1$.
donc par unicité de l'écriture sous forme irréductible,
on a $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$, donc $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$.

$\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ injective, et $\varphi_1: \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ bijective.

$\varphi_1 \circ \varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ injective, donc induit une bijection de $\mathbb{Q}$ sur

$\varphi_1 \circ \varphi(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.