

TD 10 - Analyse 4

Exercice 1

$$d(g \circ \beta)_a = dg_{\beta(a)} \circ d\beta_a \quad (\beta, g \text{ q.c.})$$

• Considérons $v: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Alors v est bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$.
 $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \wedge \vec{y}$

$$\text{Et } F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad \text{Alors } g = v \circ F$$

$$\vec{x} \mapsto (\vec{x}, \beta(\vec{x}))$$

$$v(F(\vec{x})) = v(\vec{x}, \beta(\vec{x})) = \vec{x} \wedge \beta(\vec{x}) = g(\vec{x})$$

Supposons β est différentiable en $\vec{a}$.

L'application v est différentiable en tout point $(\vec{x}, \vec{y})$ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\text{et } dv_{(\vec{x}, \vec{y})}(\vec{h}, \vec{k}) = \vec{x} \wedge \vec{k} + \vec{h} \wedge \vec{y}$$

• Si $b: (x, y) \mapsto b(x, y)$ est bilinéaire (et dim finie)

$$\text{alors } db_{(h, k)} = b(h, y) + b(x, k)$$

Si ces β_i sont (x, y) diff en a alors

• $m: x \mapsto (\beta_1(x), \dots, \beta_n(x))$ est diff en a et $dm_a = (d\beta_{1,a}, \dots, d\beta_{n,a})$

Avec $\beta_1 = \text{id}$, $\beta_2 = \beta$, comme β est différentiable en a ,

$$F \text{ est différentiable en } a \text{ et } dF_a(h) = (h, d\beta_a(h)) \quad \begin{aligned} id(x+h) &= x+h \\ &= id(x) + h + \underbrace{0}_{=o(\|h\|)} \end{aligned}$$

Ainsi, $g = v \circ F$ est différentiable en a et

$$\begin{aligned} dg_a(h) &= d(v \circ F)_a(h) = dv_{F(a)}(dF_a(h)) \\ &= dv_{(a, \beta(a))}(h, d\beta_a(h)) \\ &= v(a, d\beta_a(h)) + v(h, \beta(a)) \\ &= a \wedge d\beta_a(h) + h \wedge \beta(a) \end{aligned}$$

Rem Si b bilinéaire, β_1, β_2 diff en a , $\phi: x \mapsto b(\beta_1(x), \beta_2(x))$

alors ϕ est diff en a et $d\phi_a(h) = b(\beta_1(a), d\beta_{2,a}(h)) + b(d\beta_{1,a}(h), \beta_2(a))$

Exercice 2

1. Soit $\ell: F \rightarrow G$ une application linéaire. Soit $a \in F$. Pour tout $R \in F$,
 $\ell(a+R) = \ell(a) + \ell(R) + \underbrace{0}_{=o(\|R\|)}$
 linéaire

Donc ℓ est différentiable en a
 et $d\ell_a = \ell$.

$F \rightarrow \mathcal{L}(F, G)$
 $d\ell: a \mapsto \ell$ est constante.

2. • $k=1$, $g_1(\pi) = \pi$. $g_1(\pi+H) = \pi+H = g_1(\pi) + H + \underbrace{0}_{=o(\|H\|)}$ et $H \mapsto H$ est linéaire,

donc $dg_{1\pi}(H) = H = g_1(H)$.

• $k=2$, $g_2(\pi) = \pi^2$. $g_2(\pi+H) = (\pi+H)^2 = \underbrace{\pi^2}_{g_2(\pi)} + \pi H + H\pi + \underbrace{H^2}_{=o(\|H\|)}$
 et $H \mapsto \pi H + H\pi$ est linéaire.

Donc $dg_{2\pi}(H) = \pi H + H\pi$.

• $k=3$, $g_3(\pi+H) = (\pi+H)^3 = \underbrace{\pi^3}_{g_3(\pi)} + \pi^2 H + \pi H\pi + H\pi^2 + \underbrace{\pi H^2 + H\pi H + H^2\pi + H^3}_{=o(\|H\|)}$

$$\|\pi H^2 + H\pi H + H^2\pi + H^3\| \leq 3\|\pi\|\|H\|^2 + \|H\|^3 = \|H\| (3\|\pi\|\|H\| + \|H\|^2) \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$$

et $H \mapsto \pi^2 H + \pi H\pi + H\pi^2$ est linéaire.

Donc $dg_{3\pi}(H) = \pi^2 H + \pi H\pi + H\pi^2$.

• $k \in \mathbb{N}^*$. $g_k(\pi+H) = (\pi+H)^k = \underbrace{\pi^k}_{g_k(\pi)} + \pi^{k-1}H + \pi^{k-2}H\pi + \pi^{k-3}H\pi^2 + \dots + \pi H\pi^{k-2} + H\pi^{k-1} + o(\|H\|)$

$\tilde{\ell}: H \mapsto \pi^{k-1}H + \pi^{k-2}H\pi + \dots + \pi H\pi^{k-2} + H\pi^{k-1}$ est linéaire

Donc g_k est différentiable en π et $dg_{k\pi}(H) = \tilde{\ell}(H)$.

3. $\det$ est polynomial en les coefficients de la matrice donc $\beta = \det$ est $\mathcal{C}^1$.

4. $\det(A+H) = \det(A_1+H_1, \dots, A_n+H_n)$

$$A = (A_1 | A_2 | \dots | A_n)$$

$$= \det(A_1, A_2+H_2, \dots, A_n+H_n)$$

$$H = (H_1 | H_2 | \dots | H_n)$$

$$+ \det(H_1, A_2+H_2, \dots, A_n+H_n)$$

$$\det(A+H) = \det(A) + \ell_n(H)$$

$$= \det(A_1, A_2, A_3+H_3, \dots, A_n+H_n) + \det(A_1, H_2, A_3+H_3, \dots, A_n+H_n) + o(\|H\|)$$

$$+ \det(H_1, A_2, A_3+H_3, \dots, A_n+H_n) + \det(H_1, H_2, A_3+H_3, \dots, A_n+H_n)$$

$$= \dots$$

$$= \det(A_1, A_2, \dots, A_n) + \det(H_1, A_2, A_3, \dots, A_n) + \det(A_1, H_2, A_3, \dots, A_n)$$

$$\dots + \det(A_1, \dots, A_{n-1}, H_n) + o(\|H\|)$$

$$= \det(A) + \sum_{i=1}^n \det(A_1, \dots, H_i, \dots, A_n) + o(\|H\|)$$

et $H \mapsto \sum_{i=1}^n \det(A_1, \dots, H_i, \dots, A_n)$ est linéaire par det est n-linéaire.

$$\text{Donc } d \det_A(H) = \sum_{i=1}^n \det(A_1, \dots, H_i, \dots, A_n)$$

$$df_A(A) = \langle \text{grad } f | A \rangle.$$

$$\det(A_1, \dots, H_i, \dots, A_n) = \begin{vmatrix} A_1 & \dots & \begin{matrix} R_{ni} \\ R_{2i} \\ \vdots \\ R_{ji} \\ \vdots \\ R_{ni} \end{matrix} & \dots & A_n \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n R_{ji} \det(\tilde{A}_{ji}) (-1)^{i+j}$$

$$\text{com } A = ((-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ji})_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots n}}$$

$$\text{Donc } d \det_A(H) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ji} (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ji}) = \sum_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots n}} R_{ji} (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ji})$$

$$\langle A | B \rangle = \text{Tr}({}^t A B) = \sum_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots n}} a_{ij} b_{ij} \quad \text{est un ps sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \quad \langle u | v \rangle = \sum u_i v_i.$$

$$\text{Donc } d \det_A(H) = \text{Tr}({}^t \text{com } A | H) = \langle \text{com } A | H \rangle$$

$$\text{Donc } \text{grad } f(A) = \text{com}(A).$$

Les points critiques de det sont les points $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\text{com}(A) = O_n$.

$$\text{On a } A {}^t \text{com } A = \det(A) \text{In}.$$

$$\text{Donc si } \text{com } A = O_n \text{ alors } \det(A) = 0. \text{ Donc } \text{rg } A \leq n-1.$$

Rappel. Le rang de A est la taille maximale d'une sous-matrice ^{carrée} de A inversible.

$$\text{Si } \text{rg } A \leq n-2 \text{ alors } \text{com } A = ((-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ji})_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots n}}$$

Or $\tilde{A}_{ji}$ est une matrice carrée de A de taille $\substack{j=1 \dots n \\ i=1 \dots n} n-1$.

Donc $\tilde{A}_{ji}$ est non inversible, donc $\text{com } A = O_n$.

Si $\text{rg } A = n-1$. Il existe une sous-matrice carrée de A de taille $n-1$ inversible. Donc il existe $i_0, j_0 \in \{1 \dots n\}$ tels que $\tilde{A}_{i_0 j_0}$ est inversible. Donc $\det(\tilde{A}_{i_0 j_0}) \neq 0$, donc $\text{com } A \neq O_n$.

Donc les points critiques de det sont les matrices de rang $\leq n-2$.

Exercice 3

$$1. a) \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

et $\det$ est continue

et $\mathbb{R}^*$ ouvert de $\mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.

$$b) \beta: \Pi \mapsto \Pi^{-1}, \quad \Pi^t \text{ com } \Pi = \det \Pi \text{ In}.$$

Donc $\Pi^{-1} = \frac{1}{\det \Pi} {}^t \text{com } \Pi$. Donc les coefficients de Π^{-1} sont des fractions rationnelles en les coefficients de Π .

Donc β est $\mathcal{C}^\infty$.

$$2. a) \text{ Soit } H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \|H\| < 1.$$

$$\text{Si } |x| < 1, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{h=0}^{+\infty} x^h$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \|H^n\| \leq \|H\|^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \|H\|^n \text{ converge}$$

$$(1-x)^{-1} = \sum_{h=0}^{+\infty} x^h$$

car $\|H\| < 1$.

norme
multiplicative
 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Donc par comparaison de séries à termes $\oplus$, $\sum_{n=0}^{+\infty} H^n$ converge absolument donc converge.

$$(I_n - H) \sum_{h=0}^n H^h = \sum_{h=0}^n H^h - \sum_{h=0}^n H^{h+1} = I_n - H^{n+1}.$$

$$\text{Or } \|H\| < 1, \text{ donc } \|H^{n+1}\| \leq \|H\|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Par continuité } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad (\text{Ensemble eucl. linic}), \\ B \mapsto (I_n - H) \cdot B$$

$$(I_n - H) \sum_{h=0}^{+\infty} H^h = I_n.$$

$$\text{De même, } \sum_{h=0}^{+\infty} H^h (I_n - H) = I_n.$$

$$\text{Donc } I_n - H \text{ est inversible, d'inverse } \sum_{n=0}^{+\infty} H^n.$$

Si $\|H\| < 1$ alors $\| -H \| < 1$ et $I_n + H$ est inversible d'inverse

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-H)^n.$$

$$\text{Donc } (I_n + H)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-H)^n = I_n - H + \overbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} (-H)^n}^{R(H)}$$

$$\text{Or pour } \|H\| < \frac{1}{2}, \quad \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} (-H)^n \right\| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|H\|^n = \|H\|^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \|H\|^{n-2} \\ = \|H\|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \|H\|^n$$

$$= \|H\|^2 \frac{1}{1 - \|H\|} \quad \text{car } \|H\| < 1$$

$$\leq 2\|H\|^2 = O(\|H\|^2)$$

Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} (-H)^n = o(\|H\|)$.

Donc $(I_n + H)^{-1} = I_n - H + o(\|H\|)$.

2. b) Soit $H \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

$$\|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\| \|H\| < 1$$

$$(A+H)^{-1} = (A(I_n + A^{-1}H))^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1} A^{-1}$$

$$= (I_n - A^{-1}H + R(A^{-1}H)) A^{-1}$$

$$= A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + R(A^{-1}H)A^{-1}$$

$$\|R(A^{-1}H)A^{-1}\| \leq \|R(A^{-1}H)\| \|A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}H\|^2 \|A^{-1}\|$$

$$\leq 2\|A^{-1}\|^2 \|H\|^2 \|A^{-1}\|$$

$$= 2\|A^{-1}\|^3 \|H\|^2 = O(\|H\|^2)$$

$$= \|H\| \underbrace{(2\|A^{-1}\|^3 \|H\|)}_{\substack{\varepsilon(\|H\|) \\ \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0}}$$

Donc $R(A^{-1}H)A^{-1} = o(\|H\|)$.

Donc $(A+H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + o(\|H\|)$

et $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire.

Donc $df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$.

3. a) $G: \pi \mapsto \pi g(\pi)$.

Soit $b: \mathcal{J}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{J}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{J}_n(\mathbb{R})$. Alors b est bilinéaire et pour tout

$$(A, B) \mapsto AB$$

$(A, B) \in \mathcal{J}_n(\mathbb{R})^2$ et tout $(H, K) \in \mathcal{J}_n(\mathbb{R})^2$,

$$db_{(A,B)}(H, K) = b(A, K) + b(H, B) = AK + KB.$$

Soit $F: \pi \mapsto (\pi, g(\pi))$. Alors F est différentiable en A et

$$dF_A(H) = (H, dg_A(H)).$$

$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

Comme $G = b \circ F$, G est différentiable

$$(df_{1,x}(h), \dots, df_{n,x}(h))$$

en A et $dG_A(H) = d(b \circ F)_A(H) = db_{F(A)}(dF_A(H))$

$$= db_{(A, g(A))}(H, dg_A(H))$$

$$= b(A, dg_A(H)) + b(H, g(A))$$

$$= A dg_A(H) + Hg(A).$$

b) Prenons $g = \beta : \Pi \mapsto \Pi^{-1}$. Soit $A \in \mathcal{G}_n^p(\mathbb{R})$. Alors g est diff en A car de classe $\mathcal{C}^1$, et $G(\Pi) = \Pi * \Pi^{-1} = I_n$.

$$G(\Pi + H) = I_n = G(\Pi) + \underbrace{0}_{=0(1\|H\|)} + \underbrace{0}_{=0(1\|H\|)} \quad \text{donc } dG_\Pi(H) = 0_n.$$

$$\text{Or } dG_A(H) = A dg_A(H) + Hg(A),$$

$$\text{donc } 0_n = A dg_A(H) + H A^{-1},$$

$$\text{donc } dg_A(H) = -A^{-1} H A^{-1}.$$