

TD 11. Analyse 4

Exercice 1

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{On a } 0 \leq (|x| - |y|)^2 = |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = x^2 - 2|xy| + y^2.$$

$$\text{Donc } 0 \leq |xy| \leq x^2 - |xy| + y^2 \leq x^2 - xy + y^2.$$

$$\begin{aligned} x &\leq |x| \\ -x &\geq -|x| \end{aligned}$$

$$2. \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases} \quad p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*$$

$f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ est continue, donc comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est ouvert,

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Par tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} \right| = \left| \frac{xy \overset{\geq 0}{x^{p-1}} \overset{\geq 0}{y^{q-1}}}{x^2 - xy + y^2} \right| \\ &= \frac{|xy| |x|^{p-1} |y|^{q-1}}{x^2 - xy + y^2} \leq 1 \text{ par } q \geq 1. \\ &\leq |x|^{p-1} |y|^{q-1}. \end{aligned}$$

Si $p > 1$, ~~et~~ ^{ou} $q > 1$ alors $|x|^{p-1} |y|^{q-1} \xrightarrow{\|x, y\| \rightarrow 0} 0$

Alors $|f(x, y) - f(0, 0)| \xrightarrow{\|x, y\| \rightarrow 0} 0$. Donc f est continue en $(0, 0)$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Si $p = 1$ et $q = 1$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(x, x) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \xrightarrow{\|x\| \rightarrow 0} 1 \neq 0 = f(0, 0).$$

Donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

3. Si $p, q \geq 2$ alors $p \geq 2$ et $q \geq 2$, donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ donc f n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

4. Comme f est différentiable en $(0, 0)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \text{on a } f((0,0) + (x,y)) &= f(x,y) = f(0,0) + df_{(0,0)}(x,y) + o(\|(x,y)\|) \\ &= \underbrace{f(0,0)}_{=0} + x \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_a + y \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_b + o(\|(x,y)\|) \\ &= ax + by + o(\|(x,y)\|). \end{aligned}$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = \frac{x^p 0^q}{\dots} = 0$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Donc $a = 0$.

On a pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = 0$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Donc $b = 0$.

On a donc $f(x,y) = o(\|(x,y)\|)$.

Or $f(x,x) = \frac{x^3}{x^2} = x$.

Ceci contredit le fait que $f(x,x) = o(\|(x,x)\|)$ $\underset{x \rightarrow 0}{x}$

$$\left\| \frac{x}{\|(x,x)\|} \right\| = 1 \not\rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow 0$$

Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

$${}^t U U = \sum_{i=1}^p u_i^2$$

$$AX = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

1. On a ${}^t(AX)AX = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \right)^2 = f(x)$.

Donc $f(x) = {}^t x {}^t A A x$.

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^p x_i^2$$

Soit $x \in \mathcal{J}_{p,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{J}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$f(x+H) = {}^t(x+H) {}^t A A (x+H) = ({}^t x + {}^t H) {}^t A A (x+H)$$

$$= \underbrace{{}^t x {}^t A A x}_{f(x)} + \underbrace{{}^t x {}^t A A H}_{L(H)} + \underbrace{{}^t H {}^t A A x}_{=0 \text{ as } \|H\| \rightarrow 0} + \underbrace{{}^t H {}^t A A H}_{=0 \text{ as } \|H\| \rightarrow 0}$$

$$\|AH\|_2 \leq \|A\| \|H\|$$

• $H \mapsto {}^t x {}^t A A H + {}^t H {}^t A A x$ est linéaire.

$$\bullet |{}^t H {}^t A A H| = {}^t (AH) A H = \|AH\|_2^2 \leq (\|A\|_2 \|H\|_2)^2 = \|H\|_2 \underbrace{(\|A\|_2^2 \|H\|_2)}_{\xrightarrow{H \rightarrow 0} 0} = o(\|H\|_2)$$

Donc f est diff en $x \in \mathcal{J}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{et } df_x(H) &= {}^t x {}^t A A H + \underbrace{{}^t H {}^t A A x}_{=0} = {}^t x {}^t A A H + {}^t x {}^t A A H = 2 {}^t x {}^t A A H \\ &= {}^t ({}^t H {}^t A A x) \end{aligned}$$

Donc $J_f(x) = 2^t x^t A A$.

2. Soient $n: X \mapsto \|x\|_2^2$ et $\ell: X \mapsto AX$.

Alors $f = n \circ \ell$

$$\text{On a } n(x+H) = \langle x+H | x+H \rangle = \underbrace{\|x\|^2}_{n(x)} + \underbrace{2\langle x | H \rangle}_{L(H)} + \underbrace{\|H\|^2}_{=o(\|H\|)}$$

Donc n est différentiable en x et $dn_x(H) = 2^t x H$.

ℓ est linéaire donc différentiable en x et $d\ell_x(H) = AH$.

Donc par composition d'applications différentiables, f est différentiable

$$\begin{aligned} \text{en } x \text{ et } df_x(H) &= d(n \circ \ell)_x(H) = \cdot dn_{\ell(x)}(d\ell_x(H)) \\ &= dn_{Ax}(AH) \\ &= 2^t (Ax) A H \\ &= \underbrace{2^t x^t A A}_J H. \end{aligned}$$

Exercice 3

1. $f: (r, \varphi, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ $(J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots p}})$

Donc $J_f(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.

3. $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Soit $g: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Posons $\tilde{g}(r, \varphi, z) = g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \varphi, z) &= \cos \varphi \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) + \sin \varphi \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \\ &= dg(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot \vec{e}_r = \langle \text{grad } g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) | \vec{e}_r \rangle \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}(r, \varphi, z) = -r \sin \varphi \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) + r \cos \varphi \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

$$\begin{aligned}
 &= r \, dg(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot \vec{e}_\varphi = r \langle \text{grad } g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) | \vec{e}_\varphi \rangle \\
 \frac{\partial \tilde{g}}{\partial z}(r, \varphi, z) &= r \times \frac{\partial g}{\partial z}(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = dg(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot \vec{e}_z \\
 &= \langle \text{grad } g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) | \vec{e}_z \rangle.
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{grad } g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \varphi, z) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}(r, \varphi, z) \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial z}(r, \varphi, z) \vec{e}_z.$$

Exercice 4.

$$1. \text{ Considérons } n: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \\ x \mapsto \|x\|^2$$

$$r: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\text{Alors pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad N(x) = \pi \circ n(x).$$

n est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de

différentielle $dn: x \mapsto 2\langle x | \cdot \rangle$ qui est continue $dn_x(A) = 2\langle x | A \rangle$.

(car linéaire en dimension finie), donc n est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$$r \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R}_+^*, \quad r'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Donc par composition d'applications C^1 , N est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout $A \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
 dN_x(A) &= d(\pi \circ n)_x(A) = d\pi_{n(x)}(dn_x(A)) \\
 &= d\pi_{n(x)}(2\langle x | A \rangle) \\
 &= 2\langle x | A \rangle \times r'(\|x\|^2) \\
 &= \frac{2\langle x | A \rangle}{2\sqrt{\|x\|^2}} = \frac{\langle x | A \rangle}{\|x\|}.
 \end{aligned}$$

2. F est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ comme composée et produit de fonctions C^1 .

$$\text{Considérons } b: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad g: x \mapsto (\beta(\|x\|), x) \\ (t, x) \mapsto tx$$

$$\text{Alors } F = b \circ g. \quad (b \text{ est bilinéaire})$$

Donc F est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et

$$\begin{aligned}
 dF_x(A) &= d(b \circ g)_x(A) = db_{g(x)}(dg_x(A)) \\
 &= db_{(\beta(\|x\|), x)}\left(\beta'(\|x\|) \frac{\langle x | A \rangle}{\|x\|}, A\right) \\
 &= \beta(\|x\|)A + \beta'(\|x\|) \frac{\langle x | A \rangle}{\|x\|} x
 \end{aligned}$$

Rappel. b bilinéaire

$$db_{(x,y)}(A,B) = b(x,B) + b(A,y)$$

$$\varphi(x) = b(\beta_1(x), \beta_2(x))$$

$$d\varphi_x(A)$$

$$= b(d\beta_1(x), A, \beta_2(x))$$

$$+ b(\beta_1(x), d\beta_2(x), A)$$

3. Pour tout $R \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{F(0) + \ell(R) + o(\|R\|)}{0}$$

$$\begin{aligned} F(0+R) &= F(R) = \beta(\|R\|)R = \left(\beta(0) + \beta'(0)\|R\| + o(\|R\|)\right)R \\ &= (1 + o(\|R\|))R \\ &= R + \underbrace{\beta(0)\|R\|}_{o(\|R\|)} \\ &= F(0) + R + o(\|R\|) \end{aligned}$$

et $R \mapsto R$ est linéaire.

Donc F est différentiable en 0 et $dF_0(R) = R$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et tout $R \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|dF_x(R) - dF_0(R)\| &= \|\beta(\|x\|)R + \beta'(\|x\|) \frac{\langle x|R \rangle}{\|x\|} x - R\| \\ &\leq \|\beta(\|x\|) - \beta(0)\| \|R\| + \|\beta'(\|x\|) \frac{\langle x|R \rangle}{\|x\|} x\| \\ &\leq |\beta(\|x\|) - \beta(0)| \|R\| + |\beta'(\|x\|)| \|x\| \|R\| \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|dF_x - dF_0\| \leq \underbrace{|\beta(\|x\|) - \beta(0)|}_{\substack{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ (par} \\ \text{continuité de } \beta \\ \text{en } 0}} + \underbrace{|\beta'(\|x\|)|}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \|x\|$$

Donc dF est continue en 0, donc F est C^1 en 0.

4. Soit $(x, R) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} x \neq 0 \quad \langle dF_x(R) | R \rangle &= \langle \beta(\|x\|)R + \beta'(\|x\|) \frac{\langle x|R \rangle}{\|x\|} x | R \rangle \\ &= \beta(\|x\|) \langle R | R \rangle + \beta'(\|x\|) \frac{\langle x|R \rangle}{\|x\|} \langle x | R \rangle \\ &= \beta(\|x\|) \|R\|^2 + \underbrace{\beta'(\|x\|) \frac{\langle x|R \rangle^2}{\|x\|}}_{\geq 0 \text{ car } \beta \text{ est croissante}} \\ &\geq \beta(\|x\|) \|R\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Si } x=0, \quad \langle dF_0(R) | R \rangle = \|R\|^2 = \underbrace{\beta(\|0\|)}_1 \|R\|^2.$$

D'où le résultat.

5. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Si $dF_x(R) = 0$ alors $0 = \langle dF_x(R) | R \rangle \geq \beta(\|x\|) \|R\|^2 \geq 0$, donc $R = 0$.

Donc dF_x est injective donc JF_x est inversible $\neq 0$.

• F est injective : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $F(x) = F(y)$.

Alors $\underbrace{\beta(\|x\|)}_{\geq 0} x = \underbrace{\beta(\|y\|)}_{\geq 0} y$, donc $\underbrace{\beta(\|x\|)\|x\|}_{g(\|x\|)} = \underbrace{\beta(\|y\|)\|y\|}_{g(\|y\|)}$.

Or l'application $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:
 $t \mapsto \beta(t)t$

g est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(t) = \underbrace{\beta'(t)t}_{\geq 0} + \beta(t) \geq \beta(0) = 1.$$

Donc g est injective, donc $\|x\| = \|y\|$, donc puisque x et y sont positivement liés, $x = y$.

• F est surjective : Soit $y \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Alors φ est continue, $\varphi(0) = 0$,
 $t \mapsto \|F(ty)\|$

$$\text{et } \varphi(1) = \|F(y)\| = \|\beta(\|y\|)y\| = \beta(\|y\|)\|y\| \geq \|y\|.$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0, 1]$

tel que $\varphi(t_0) = \|y\|$, i.e. $\|F(t_0 y)\| = \|y\|$.

$$\text{Or } F(t_0 y) = \underbrace{\beta(\|t_0 y\|)}_{\geq 0} t_0 y$$

Donc $F(t_0 y) = y$. Donc F est surjective.

D'où le résultat.