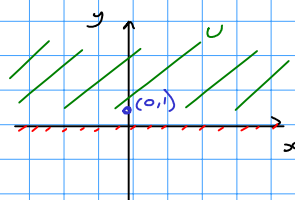


TD 13. Analyse 4

Exercice 1



1. $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est ouvert.

$P(x,y) = \frac{2x}{y}$ et $Q(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}$: on a $\omega = Pdx + Qdy$. P et Q sont $\mathcal{C}^1$ sur U .

On a $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x}{y^2}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{2x}{y^2}$.

Donc $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Donc ω est fermée sur U .

2. (1) U est un ouvert étoilé, et comme ω est fermée, ω est exacte.

(2) On résout
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} \end{cases}$$

Il existe $R: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\phi(x,y) = \frac{x^2}{y} + R(y)$.

On en déduit $-\frac{x^2}{y^2} + R'(y) = -\frac{x^2}{y^2}$, et donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$R(y) = c.$$

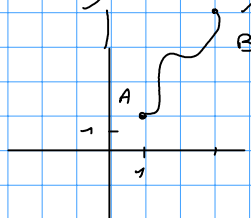
Donc $\phi(x,y) = \frac{x^2}{y} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

En prenant $c=0$, on a $\omega = d\phi = \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy$.

3. $\int_{\gamma} \omega = \phi(B) - \phi(A)$ (ω exacte)

$$= \phi(3,8) - \phi(1,2)$$

$$= \frac{9}{8} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$



Exercice 2

$U = \mathbb{R}^3$ est un ouvert étoilé.

On a $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

$$\text{avec } \begin{cases} P(x,y,z) = 3x^2y + z^3 \\ Q(x,y,z) = 3y^2z + x^3 \\ R(x,y,z) = 3z^2x + y^3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 - 3x^2 = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) = 3z^2 - 3z^2 = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2 - 3y^2 = 0.$$

Donc ω est fermée sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ étant un ouvert étoilé,

ω est exacte. Il existe $f \in \mathcal{C}^1$ telle que $\omega = df$.

$$\text{On veut } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2y + z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2z + x^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2x + y^3 \end{cases} \quad (*)$$

On a donc $f(x,y,z) = x^3y + z^3x + h_1(y,z)$ avec $h_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{C}^1$

$$\text{Donc } \cancel{x^3} + \frac{\partial h_1}{\partial y}(y,z) = 3y^2z + \cancel{x^3},$$

donc $h_1(y,z) = y^3z + h_2(z)$ avec $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{C}^1$

On a donc $f(x,y,z) = x^3y + z^3x + y^3z + h_2(z)$.

$$\text{Donc } \cancel{3z^2x} + \cancel{y^3} + h_2'(z) = \cancel{3z^2x} + \cancel{y^3}$$

Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $h_2(z) = c$.

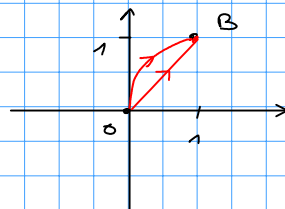
$$\text{Donc } f(x,y,z) = x^3y + z^3x + y^3z + c.$$

Réciproquement, une telle fonction vérifie (*).

Donc l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}^3$ de ω est

$$\{(x,y,z) \mapsto x^3y + z^3x + y^3z + c, c \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 3



1. Le segment est paramétré par

$$\Gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$$

$$[A,B] \text{ de } \mathbb{R}^2$$

$$[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Gamma: t \mapsto tB + (1-t)A$$

$$= (tx_B + (1-t)x_A, ty_B + (1-t)y_A)$$

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \int_0^1 P(\beta_1(t), \beta_2(t)) \beta_1'(t) + Q(\beta_1(t), \beta_2(t)) \beta_2'(t) dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 - t^2) dt = 0$$

2. Le chemin est paramétré par

$$\Gamma_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (t^2, t)$$

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t \end{cases}$$

$$\omega = P(x,y) dx + Q(x,y) dy$$

$$= x^2 dx - xy dy$$

$$\int_{\Gamma_2} \omega = \int_0^1 (t^4 \times 2t - t^2 \times t) dt = \int_0^1 (2t^5 - t^3) dt$$

$$= \left[\frac{2t^6}{6} - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Γ_1 et Γ_2 ont les mêmes extrémités mais $\int_{\Gamma_1} \omega \neq \int_{\Gamma_2} \omega$.

Donc ω n'est pas exacte.

ou on montre que ω n'est pas fermée. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé, on a ω n'est pas exacte.

$$\text{On a } \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -y.$$

$$\text{Donc } \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2.$$

Donc ω n'est pas fermée.

Exercice 4

$$F = (P, Q, R)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

1. $\mathbb{R}^3$ est un ouvert étoilé. F est $\mathcal{C}^1$

$$\text{On a } \begin{cases} P(x, y, z) = 2xy + z^3 \\ Q(x, y, z) = x^2 \\ R(x, y, z) = 3xz^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad & \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 2x = 0 \\ & \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) = 3z^2 - 3z^2 = 0 \\ & \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Donc F dérive d'un potentiel scalaire f .

$$\text{Alors } F = \vec{\text{grad}} f.$$

$$\text{On résout } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + z^3 \\ (*) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3xz^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{On a donc } f(x, y, z) = x^2 y + z^3 x + R_1(y, z) \text{ avec } R_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{C}^1.$$

$$\text{Donc } x^2 + \frac{\partial R_1}{\partial y}(y, z) = x^2,$$

$$\text{donc } R_1(y, z) = R_2(z) \text{ avec } R_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^1.$$

$$\text{On a donc } f(x, y, z) = x^2 y + z^3 x + R_2(z).$$

$$\text{Donc } 3z^2 x + R_2'(z) = 3xz^2,$$

$$\text{Il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que } R_2(z) = c.$$

$$\text{Donc } f(x, y, z) = x^2 y + z^3 x + c.$$

Réciproquement, une telle fonction vérifie (*).

2. U est un ouvert étoilé (car convexe).

On cherche $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

telles que $F = \vec{\text{grad}} f$.



On résout $(*) \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{(x-y)^2} = -y(x-y)^{-2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{cases}$

On a donc $\phi(x, y) = y(x-y)^{-1} + h(y) = \frac{y}{x-y} + h(y)$ avec $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$.

Donc $\frac{\cancel{(x-y)} + y}{\cancel{(x-y)}^2} + h'(y) = \frac{\cancel{x}}{\cancel{(x-y)}^2}$

Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $h(y) = c$.

Donc $\phi(x, y) = \frac{y}{x-y} + c$.

Réciproquement, une telle fonction vérifie $(*)$.