

1 Courant induit dans un cadre

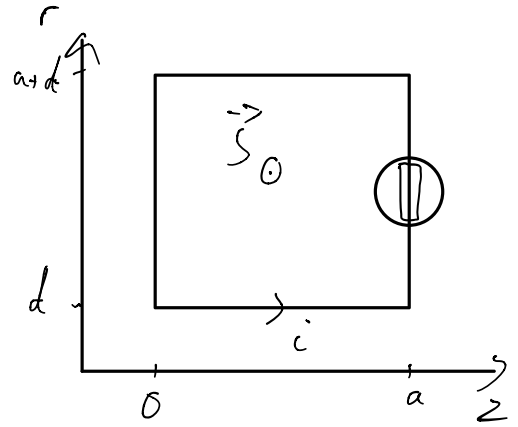
1. Champ magnétique créé par le fil.

- $(O, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$ est plan de symétrie de courants:

$$\rightarrow \underline{\vec{B} \parallel \vec{u}_\theta}$$

- le fil est supposé infini. Toute translation selon (Oz) , toute rotation autour de (Oz)

laissent le système invariant $\rightarrow \underline{B(r, \theta, z)}$



- théorème d'Ampère (ARQS) $\rightarrow \underline{\vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$

2. A travers 1 spire:

$$\Phi_1 = \int_0^a \int_d^{d+a} B \, dr \, dz$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \int_0^a \int_d^{d+a} \frac{dr \, dz}{r}$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} a \int_d^{d+a} \frac{dr}{r}$$

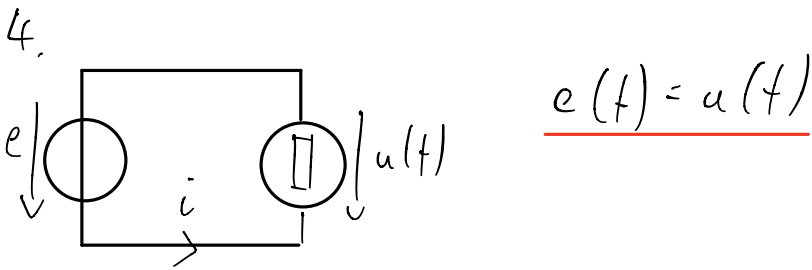
$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

A travers le cadre: $\underline{\Phi = N \Phi_1 = \frac{\mu_0 i(t) a N}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)}$

3. Loi de Faraday: $e(t) = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 a N}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{di(t)}{dt}$

or $i(t) = \sqrt{2} I_{\text{eff}} \cos(2\pi f t)$

$$\rightarrow e(t) = \boxed{\frac{\mu_0 a N f \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) I_{\text{eff}}}{\sqrt{2}}} \sqrt{2} \sin(2\pi f t)$$



5. $U_{eff} = E_{eff} = \mu_0 a N f \ln \left(1 + \frac{a}{d}\right) I_{eff}$

$\rightarrow N = \frac{U_{eff}}{\mu_0 a f I_{eff} \ln \left(1 + \frac{a}{d}\right)} = 28,7 \sim 29 \text{ spires}$

II Règle de flux maximal

1. $\vec{B}' = \begin{cases} \mu_0 N I' \vec{u}_x & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$

$\Phi' = B'S' = L' I' \rightarrow \underline{L' = \mu_0 N S'}$

2. $\Phi_{I' \rightarrow I} = B'S \vec{n} \cdot \vec{u}_x = B'S \cos \theta = M I'$

$\underline{M = \mu_0 N S \cos \theta}$

3. $\underline{\mathcal{E}_{em} = \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} L' I'^2 + M I I'}$

4. $R_{em} = \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cancel{\frac{1}{2} L I^2} + \cancel{\frac{1}{2} L' I'^2} + M I I' \right)$

$\underline{R_{em} = \mu_0 N S I I' \sin \theta}$

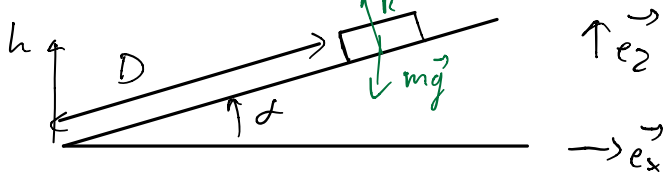
5. $\underline{R_{em} = 0}$ en $\theta = 0 [\pi]$, $\rightarrow \underline{\Phi_{I' \rightarrow I} = B'S}$ est maximal
 $|R_{em}|$ est maximal en $\theta = \frac{\pi}{2} [\frac{3\pi}{2}]$, $\Phi_{I' \rightarrow I} = 0$.

La spire "essaie" de se redresser et se mettre dans le même

sens que le solénoïde. Dans cette position d'équilibre. $\Phi_{I \rightarrow I}$ (et M) sont maximaux.

III Freinage par induction

1. Ralentissement mécanique



$$\text{Rq: } \tan \alpha = \frac{10}{100}$$

$$\Rightarrow \alpha = 5,7^\circ$$

conservation d'énergie mécanique : $\Delta E_m = 0$

$$\text{or } E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + mgz$$

$$E_m(z=0) = \frac{1}{2} m v_a^2$$

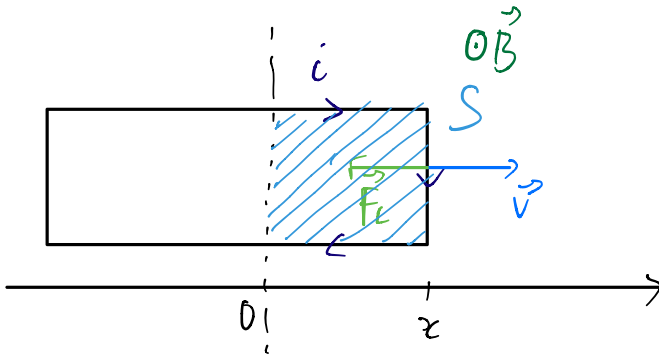
$$E_m(z=h) = \frac{1}{2} m 0^2 + mgh = mg D \sin \alpha$$

$$E_m(z=0) = E_m(z=h) \Rightarrow \frac{m v_a^2}{2} = mg D \sin \alpha$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{v_a^2}{g \sin \alpha} = 453 \text{ m} \quad \text{!!! C'est long !!}$$

2. Ralentissement par induction

a. circuit mobile dans $\vec{B}$ uniforme $\rightarrow$ induction de Lorentz



* Circuit entre dans la zone avec $\vec{B}$

- $S \nearrow$

$$- \Phi = BS \nearrow$$

$$- e = - \frac{d\Phi}{dt} \text{ apparaît } \rightarrow i$$

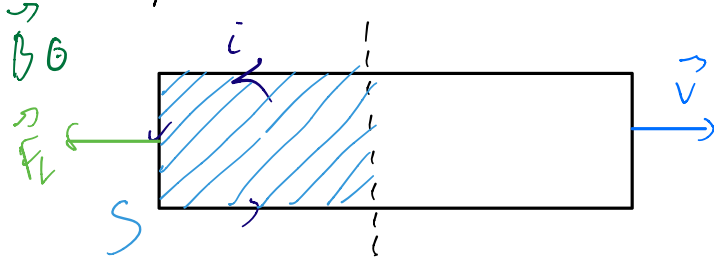
$$- \vec{F}_L = \int i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

- Freinage : $v \downarrow$

* Une fois que la planche est entièrement dans la zone : $S = \text{cte}$

$$\rightarrow e = 0 \rightarrow v = \text{cte}$$

* La planche sort de la zone



$$- S \downarrow$$

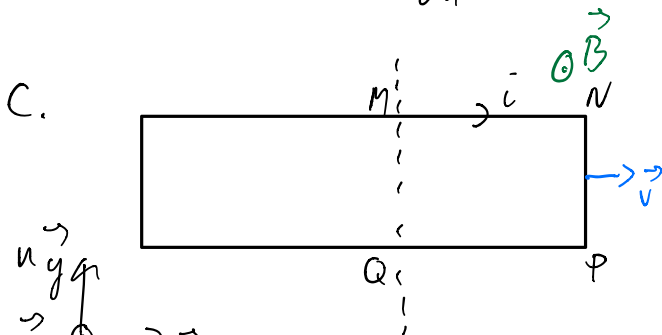
$$- \phi \downarrow$$

- e apparaît $\rightarrow i$

$$- \vec{F}_L \neq \vec{0}$$

- Freinage : $v \downarrow 0$

$$b. \quad e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d(B \vec{u}_z \cdot S(-\vec{u}_z))}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = \underline{Blv}$$

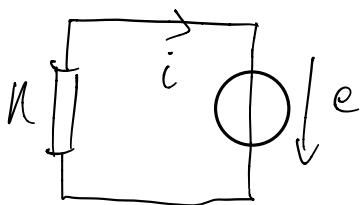


$$e = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int -vB \vec{u}_y \cdot d\vec{l}$$

$$e = \int_N^P -vB dl \vec{u}_y \cdot \vec{u}_x + \int_N^P -vB dl \vec{u}_y \cdot (-\vec{u}_y) + \int_P^Q -vB dl \vec{u}_y \cdot (-\vec{u}_x)$$

$$\underline{e = Blv}$$

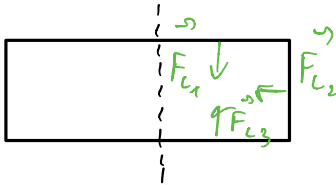
d. Montage électrique:



$$e = Ri \rightarrow (e - Ri = 0)$$

$$i = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}$$

Equation méca



$$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_{L1} + \vec{F}_{L3} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \vec{F}_L = \vec{F}_{L_2} = -i l B \vec{u}_x$$

PFD : $m \vec{v} = \vec{F}_L$ ($m \dot{v} - F_L = 0$ (2))

// $\vec{u}_x$ $m \dot{v} = -i l B = -\frac{(B l)^2}{R} v$

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m R}{l^2 B^2}$$

$$v(t) = v_a e^{-t/\tau}$$

Rq : approche énergétique (1) i - (2) v

$$e i - R i^2 - m \dot{v} + F_L v = 0$$

couplage électromécanique : $e i = -F_L v$

d'où $\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{E_c} \right) = \underbrace{-R i^2}_{\text{puissance dissipée par effet Joule}}$

e. On intègre $x(t) = -\tau v_a e^{-t/\tau} + \text{cte}$

or $x(0) = 0$ donc $x(t) = \tau v_a (1 - e^{-t/\tau})$

f. On a $x(t) = L = \tau v_a (1 - e^{-t/\tau})$

$$\rightarrow \tau = -L \ln \left(1 - \frac{L}{\tau v_a} \right) = 3,5 \text{ ms}$$

g. $v(t) = v_a e^{-t/\tau} = v_a \left(1 - \frac{L}{\tau v_a} \right) = v_a - \frac{L}{\tau}$

donc $\Delta v = \frac{L}{\tau} = 2,5 \text{ m.s}^{-1}$

perte de vitesse lorsque la planche entre dans la zone

h. Cette perte est la même à chaque fois que la planche entre ou sort d'une zone.

Pour avoir $30 \rightarrow 5 \text{ m.s}^{-1}$ il faut 5 zones.

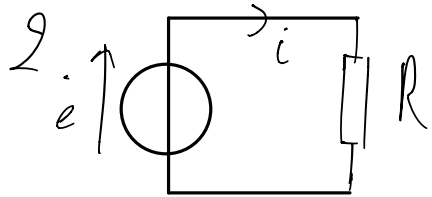
IV Oscillateur amorti par induction

1. Forces:

- poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$
- force de rappel des 2 ressorts: $-2k(z-l_0)\vec{e}_z$
- " de Laplace : $\vec{F}_L = ia\vec{e}_x \wedge B_0\vec{e}_y = iaB_0\vec{e}_z$

PFD: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = mg\vec{e}_z - 2k(z-l_0)\vec{e}_z + iaB_0\vec{e}_z$

$$\text{// } \vec{u}_z : \quad \underline{m \ddot{z} - mg + 2k(z-l_0) - \epsilon a B_0 = 0} \quad (1)$$



$$\Phi = \iint B_0 \vec{e}_y \cdot dS \vec{e}_y = B_0 a z(t)$$

loi de Faraday: $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - B_0 a \dot{z}$

loi de mailles : $e - R i = 0$ (2) $\rightarrow i = -\frac{B_0 a}{R} z$

$$3. \quad (1)z - (2)i = 0$$

$$\hookrightarrow m \ddot{z} - mg \dot{z} + 2k \dot{z}(z - l_0) - \dot{z} i a B_0 - e i + R i^2 = 0 \quad \&$$

$$R_q : e_i = -B_0 i a \dot{z} \quad i \in$$

$$\underbrace{e_i}_{\text{P}} = \underbrace{F_L z}_{\text{K}}$$

puissance ébe
marchit (Joule)

puissance des forces de Laplace

couplage électromoteur parfait

$$\delta \rightarrow d \left(\underset{\substack{\uparrow \\ E_c}}{\frac{1}{2} m v^2} \right) - d \left(\underset{\substack{\uparrow \\ E_{p, \text{grav}}}}{m g z} \right) + 2 d \left(\underset{\substack{\uparrow \\ E_{\text{élastique}}}}{\frac{k}{2} (z - l_0)^2} \right) + R i^2 = 0$$

Dans le système, il y a des variations d'énergies cinétique et potentielle (pesanteur et de rappel élastique). L'énergie finit par se dissiper par effet Joule.

4. On injecte (2) $\rightarrow$ (1):

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 l_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{2k/m} \\ Q = \frac{(aB_0)^2}{mR} \sqrt{\frac{2k}{m}} \end{cases}$$

Solution particulière : $z_p = \frac{g}{\omega_0^2} + l_0 = \frac{mg}{2k} + l_0$

Solution homogène : On calcule le discriminant :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

On suppose la résistance du circuit faible $\Rightarrow Q > 1/2$
alors $\Delta < 0$.

Les solutions sont alors $w_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm jw_p$
avec $\frac{1}{2} = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $w_p = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$

les solutions à l'équation homogène s'écrivent :

$$z_H(t) = [A \cos(w_p t) + B \sin(w_p t)] e^{-t/2}$$

Finalement $z(t) = z_H(t) + z_p(t) = l_0 + \frac{mg}{2k} + [A \cos(w_p t) + B \sin(w_p t)] e^{-t/2}$

On regarde les C.I pour fixer A et B :

$$z(0) = l_0 + \frac{mg}{2k} + b = l_0 + \frac{mg}{2k} + A \quad \rightarrow \quad \underline{A = b}$$

$$\dot{z}(0) = 0 = \left[-A w_p \sin(w_p \times 0) + B w_p \cos(w_p \times 0) \right] \times 1 - \frac{1}{2} [A \cos(w_p \times 0) + B \sin(w_p \times 0)] \times 1$$

$$0 = B \omega_p - \frac{A}{Z} \rightarrow \underline{B = \frac{b}{Z} \omega_p}$$

$$\text{D'où } z(t) = l_0 + \frac{mg}{2k} + b \left[\cos \omega_p t + \frac{1}{\omega_p Z} \sin \omega_p t \right] e^{-t/Z}$$

$$\text{et } i(t) = -\frac{B_0 a}{R} \frac{dz}{dt}$$

$$\rightarrow \underline{i(t) = \frac{B_0 a b}{R} \left(\omega_p - \frac{1}{\omega_p Z} \right) \sin(\omega_p t) e^{-t/Z}}$$

V Chauffage par induction

1. $\vec{B}$ variable dans un circuit fixe $\Rightarrow$ induction de Neumann
 - apparition de courants (de Foucault)
 - puissance dissipée par effet Joule
 - chauffage

$$2. \text{ On a } \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$C = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} j \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = j 2\pi r$$

$$\rightarrow \underline{j = \frac{C\sigma}{2\pi r}}$$

$$3. \text{ Flux de } \vec{B} \text{ dans le disque: } \Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$S: r < a$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^r B_0 \cos \omega t \vec{e}_z \cdot r dr d\theta \vec{e}_z$$

$$\underline{\Phi = \pi r^2 B_0 \cos \omega t}$$

loi de Faraday: $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 B_0 \omega \sin \omega t$

de même si $a < r < b$, $\mathcal{E} = \pi a^2 B_0 \omega \sin \omega t$

* Si $r < a$

$\mathcal{E} = \mathcal{C} = \frac{\pi r^2}{\sigma} j \rightarrow$

$j = \frac{\sigma \omega B_0 r}{2} \sin \omega t$

* Si $a < r < b$

$\mathcal{E} = \mathcal{C} = \frac{\pi a^2}{\sigma} j \rightarrow$

$j = \frac{\sigma \omega B_0 a^2}{2r} \sin \omega t$

4. $p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}$

Si $r < a$ $p_J = \sigma \left(\omega \frac{B_0 r}{2} \sin \omega t \right)^2$

Si $a < r < b$ $p_J = \sigma \left(\omega \frac{B_0 a^2}{2r} \sin \omega t \right)^2$

5. Sur tout le disque:

$P_J = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{j^2}{\sigma} r dr d\theta dz$

$P_J = \frac{\pi h \sigma}{2} (\omega B_0 \sin \omega t)^2 \left[\underbrace{\int_0^a r^3 dr}_{\frac{a^4}{4}} + a^4 \underbrace{\int_a^b \frac{r}{r^2} dr}_{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right]$

$P_J = \frac{\pi a^4 h \sigma}{2} (\omega B_0 \sin \omega t)^2 \left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$

En moyenne $\langle P_J \rangle = \frac{\pi a^4 h \sigma \omega^2 B_0^2}{4} \left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$

$\langle P_J \rangle : \propto \omega^2$

(chauffage + efficace à HF)

$\propto a^4$

(" " " plus la zone magnétique est grande)

$\propto h$

(" " " le disque est épais)

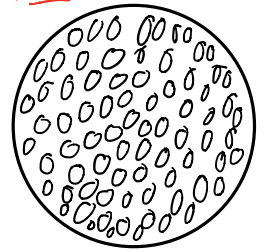
$\propto B_0^2$

(" " " le champ est intense)

6. "Feuilleter" un matériau = le matériau est un assemblage de N conducteurs plus petits : $a \rightarrow \frac{a}{\sqrt{N}}$ 

mais $\langle P_{\text{tot}} \rangle = \sum_{\text{conducteurs}} \langle P_j \rangle = N \langle P_j \rangle$

Feuilletage ↗



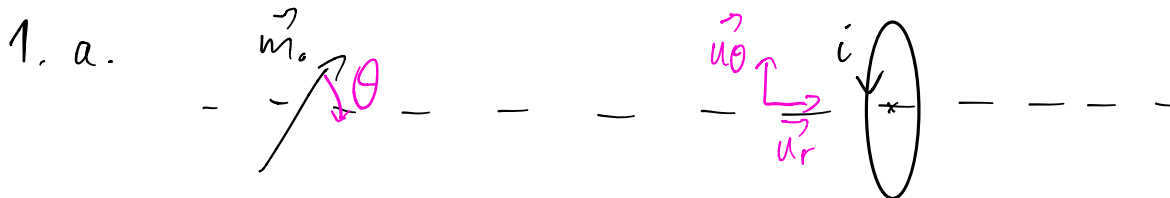
$$\langle P_{\text{tot}} \rangle = \frac{N}{4} \pi \left(\frac{a}{\sqrt{N}} \right)^4 h \sigma \omega^2 B_0^2 \left[\frac{1}{4} + \ln \left(\frac{\sqrt{N} b}{a} \right) \right]$$

$$\langle P_{\text{tot}} \rangle = \frac{\pi}{4N} a h \sigma \omega^2 B_0^2 \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \ln N \right]$$

$$\langle P_{\text{tot}} \rangle \underset{N \rightarrow \infty}{\propto} \frac{\ln N}{N} \longrightarrow 0$$

Le chauffage ↘.

IV Principe de fonctionnement de gén. synchrone



Comme la distance entre la spire et l'aimant est grande devant a , on considère le champ généré par l'aimant uniforme :

$$\vec{B}_a(M, t) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

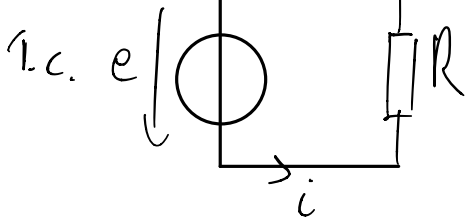
$$\phi = \pi a^2 \vec{B}_a(M, t) \cdot \vec{u}_x = \frac{\mu_0 m_0 a^2}{2 x^3} \cos \theta$$

$$\rightarrow e = - \frac{d\phi}{dt} = \dot{\theta} \frac{\mu_0 m_0 a^2}{2 x^3} \sin \theta$$

L'aimant tourne à vitesse angulaire Ω autour de (Oz) $\rightarrow \dot{\theta} = -\Omega$

$$e(t) = \frac{\mu_0 m_0 a^2}{2 x^3} \Omega \sin \Omega t$$

1.b.



$$i = \frac{e}{R} = \frac{\mu_0 m_0 a^2 \Omega}{2x^3 R} \sin \Omega t$$

$$2a \quad \vec{m}_{sp} = \pi a^2 i \vec{u}_x$$

Exprimons le champ magnétique $\vec{B}_{sp}(0)$ au niveau de l'aimant.
En coordonnées polaires d'axe $\vec{u}_x$ et d'origine le centre de la spire,
l'aimant a pour coordonnées $r=x$, $\theta=\pi$. D'où $\begin{cases} \vec{u}_r = -\vec{u}_x \\ \vec{u}_\theta = -\vec{u}_y \end{cases}$
D'où $B_{sp}(0) = \frac{\mu_0 m_{sp}}{4\pi x^3} [2 \cos \pi (-\vec{u}_x) + \sin \pi (-\vec{u}_y)]$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi x^3} \times \frac{\pi a^2 \mu_0 m_0 a^2 \Omega \sin \Omega t}{2x^3 R} \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_{sp}(0) = \frac{\mu_0^2 m_0 a^4 \Omega \sin \Omega t}{4x^6 R} \vec{u}_x$$

$$2c. \quad \vec{r} = \vec{m}_0 \wedge \vec{B}_{sp}(0) = m_0 \begin{vmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_{sp}(0) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = -m_0 \sin \Omega t B_{sp}(0) \vec{u}_z$$

$$\vec{r} = - \frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \Omega \sin^2 \Omega t}{4x^6 R} \vec{u}_z$$

Rq: Ce couple est porté par $-\vec{u}_z$, il s'oppose au mouvement. C'est conforme à la loi de Lenz.

$$3.a. \quad \mathcal{P}_e = e i = R i^2 = \frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \Omega^2 \sin^2 \Omega t}{4x^6 R}$$

$$3.b. \quad P_m = \frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \Omega^2 \sin^2 \Omega t}{4x^6 R}$$

3c. On remarque que $P_m = P_e$

Grâce au mouvement de l'aimant à proximité de la spire, un courant est induit dans cette dernière.

$P_m = P_e \Leftrightarrow$ toute puissance fournie à l'aimant est transmise à la spire sous forme de puissance électrique.