

Ex 1

1. Diélectrique : milieu isolant sans charge ou courant libre. Il n'y a que des charges liées. Le milieu se polarise sous l'action d'un champ électrique.

Linéaire :  $\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E}$   
matrice  $3 \times 3$

Homogène :  $[\chi_e]$  est diagonale

Isotrope : Aucune direction de l'espace n'est privilégiée

Dans un DLHI,  $\chi_e$  est scalaire  $\rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ .

2. transparent  $\rightarrow$  pas d'absorption

$\chi_e, \epsilon_r$  et  $n \in \mathbb{R}$

3. Il vient alors  $k \in \mathbb{R}$  et  $k = \frac{n\omega}{c}$  avec  $n = \sqrt{\epsilon_r}$

4.  $k = 33,5 \text{ m}^{-1}$   $\lambda = 0,19 \text{ m}$

domaine micro onde / onde radio

5. Dans un milieu transparent, on a la relation de structure :

$\vec{B} = \frac{n \vec{u}_x}{c} \wedge \vec{E} = \frac{n E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z$  donc  $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} = \frac{c}{n}$

6. vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{c}{n} = 188 \times 10^8 \text{ m/s}$

Ex 2

1. Bilan des forces :

- force de Coulomb  $-e\vec{E}$
- " " rappel  $-m\omega_0^2\vec{r}$

PFD appliqué à l'électron :  $m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - m\omega_0^2\vec{r}$

2. En régime forcé, on cherche  $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \varphi)$

donc  $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r}$

Il vient  $\vec{r} = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}$

or  $\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}$

vecteur polarisation est le moment dipolaire par unité de volume

$\vec{P} = ne\vec{r} = \frac{ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}$

3.  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \rightarrow \chi_e = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$

4.  $n^2 = \epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$

5.  $n^2 \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$

$n \sim \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$

$\ll 1$  car  $n \sim 1$

donc  $n \sim 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$

or  $n = \frac{2\pi f}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\omega \lambda}$

enfin  $n \sim 1 + \underbrace{\frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2}}_A + \underbrace{\frac{\omega_0^2 \omega_p^2}{2\omega_0^2}}_B \times \frac{1}{\omega_0^2}$

$$6. A = \frac{1}{2} \frac{w_p^2}{w_0^2} = 1,36 \times 10^{-4}$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{w_p^2}{w_0^2} \lambda_0^2 = 1,06 \cdot 10^{-78} \text{ m}^2$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} = 88,3 \text{ nm} \quad (UV)$$

Ex 3

1. Symetries: tout plan contenant  $(Oz)$  est plan de symetrie des charges

Invariances: toute rotation autour de  $(Oz)$  laisse le systeme invariant  $\rightarrow$  pas de dependance en  $\varphi$ .

2.  $\rho_p = -\text{div } \vec{P} = 0$  car  $\vec{P}$  uniforme

$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u}_r = P \vec{u}_z \cdot \vec{u}_r = P \cos \theta$

3. Equation de Poisson:  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

or  $\rho = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{liee}} = 0$  d'ou  $\Delta V = 0$

4.  $\Delta V(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r V(r, \theta)) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right)$

or  $\frac{d^2}{dr^2} (r V(r, \theta)) = \cos \theta \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n n(n+1) r^{n-1}$

et  $\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dV(r, \theta)}{d\theta} \right) = \cos \theta \frac{dV}{d\theta} + \sin \theta \frac{d^2 V}{d\theta^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^n (-\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)$   
 $= -2 \cos \theta \sin \theta \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^n$

Finalement  $\Delta V = 0 \Leftrightarrow 0 = \cos \theta \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n n(n+1) r^{n-2} - 2 \cos \theta \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^{n-2}$   
 $0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (n(n+1) - 2) r^{n-2}$

C'est le polynôme nul  $\rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} \ a_n(n(n+1)-2) = 0$   
 ie  $(n+2)(n-1) = 0$  si  $a_n \neq 0$

donc  $V(r, \theta) = \left(\frac{a_{-2}}{r^2} + a_1 r\right) \cos \theta$

3. Les potentiels  $V_i$  et  $V_e$  ne doivent diverger en aucun point

Pour cela,  $a_{-2} = 0$  pour  $V_i$

$a_1 = 0$  pour  $V_e$

$$V(r, \theta) = \begin{cases} V_i(r, \theta) = a_1 r & \forall r \leq R \\ V_e(r, \theta) = \frac{a_{-2}}{r^2} & \forall r \geq R \end{cases}$$

la continuité de  $V$  en  $R$  impose  $a_1 = \frac{a_{-2}}{R^3}$

Champs électriques  $\vec{E} = - \text{grad } V ; - \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$

donc  $\vec{E}_i(r, \theta) = a_1 (-\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$

$\vec{E}_e(r, \theta) = \frac{a_{-2}}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$

$\vec{E}_\perp$  est discontinue en  $r = R$  :

$$(\vec{E}_e(R, \theta) - \vec{E}_i(R, \theta)) \cdot \vec{u}_r = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

$$\frac{2 a_{-2}}{R^3} \cos \theta + a_1 \cos \theta = \frac{\rho \cos \theta}{\epsilon_0} \quad \text{or } a_1 = a_{-2}/R^3$$

d'où  $a_{-2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}$  et  $a_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}$

Finalement  $V_i(r, \theta) = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta$

$$V_e(r, \theta) = \frac{PR^3}{3\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\vec{E}_i(r, \theta) = -\frac{P}{3\epsilon_0} (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta u_\theta) = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{Champs depolarisant}$$

$$\vec{E}_e(r, \theta) = \frac{PR^3}{3\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

$\vec{E}_e$  correspond au champ électrique crée par un dipôle ponctuel

$$\vec{p} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{P} \text{ placé en } O. \quad \left( \vec{E} \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3} \right)$$

On retrouve  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$

6. On note  $\vec{E}_1$  le champ électrique crée par la boule uniformément polarisée calculé au-dehors.

On a  $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$

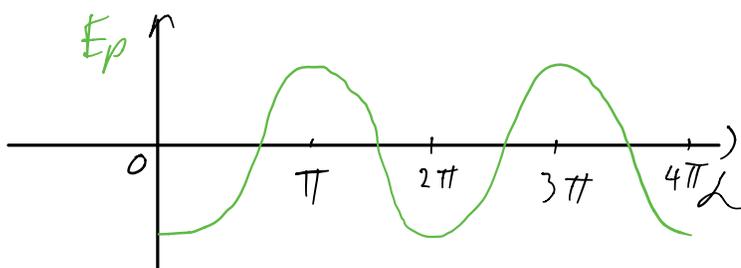
Dans la boule  $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$  or  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{tot}$

donc  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \left( \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0 - \chi_e \frac{\vec{P}}{3}$

$$\vec{P} = \frac{\epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0}{1 + \chi_e/3}$$

$E_x 4$  1.  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p E \cos \alpha$

2.



Positions d'équilibre :

-  $\alpha = 0 [2\pi]$  stable

-  $\alpha = \pi [2\pi]$  instable

3a.  $\Delta E_p = E_p(z) - E_p(0^+) = -pE - (pE) = -2pE < 0$   
 cédé au milieu  $\rightarrow$  chauffage

3b. Pour un dipôle, pendant  $T$ , il y a 2 retournements :  
 $\mathcal{P} = 2 \times \frac{2pE}{T} = 4pEf$   
 $\mathcal{P}_v = nd \mathcal{P} = nd 4pEf$

4.  $Z$  est le temps caractéristique pour que le milieu retrouve son état d'équilibre en annulant  $\vec{E}$ .

5.  $Z \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E} \xrightarrow{\mathcal{C}} (Zi\omega + 1) \vec{P} = \epsilon_0 \chi_0 \vec{E}$

or dans 1 DLH  $\vec{P} = \epsilon_0 \underline{\chi} \vec{E}$  donc  $\underline{\chi} = \frac{\chi_0}{1 + i\omega Z}$

$\underline{\chi} = \frac{\chi_0 (1 - i\omega Z)}{(1 + i\omega Z)(1 - i\omega Z)}$

$\underline{\chi} = \frac{\chi_0}{1 + \omega^2 Z^2} + i \frac{-\chi_0 \omega Z}{1 + \omega^2 Z^2} \quad (\beta = -1)$

$\chi_1$   $\chi_2$

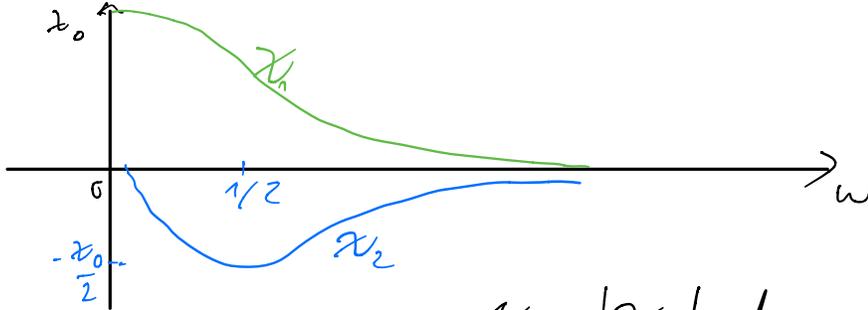
6.  $\chi_1$  est  $\searrow$  sur  $\mathbb{R}$ .

$\chi_2$  est plus compliqué. Étudions  $\frac{d\chi_2}{d\omega}$

or  $\frac{d\chi_2}{d\omega} = \frac{-1}{(1 + \omega^2 Z^2)^2} (\chi_0 Z (1 + \omega^2 Z^2) - \chi_0 \omega Z (2\omega Z^2))$

$\frac{d\chi_2}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow 0 = 1 + \omega^2 Z^2 - 2\omega^2 Z^2 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{Z}$

|                           |   |             |           |
|---------------------------|---|-------------|-----------|
| $\omega$                  | 0 | $1/Z$       | $+\infty$ |
| $\frac{d\chi_2}{d\omega}$ | - | 0           | +         |
| $\chi_2$                  | 0 | $-\chi_0/2$ | 0         |



$$\omega \ll 1/2 \quad \underline{\chi} \sim \chi_1 \in \mathbb{R}$$

milieu transparent

$$\omega \gg 1/2 \quad \underline{\chi} \rightarrow 0 \quad \text{pas de polarisation}$$

$\omega \sim 1/2 : |\chi_2| \text{ est max. } \rightarrow \text{maximum d'absorption.}$

7.  $\vec{j}_p = \frac{\delta \vec{P}}{\delta t}$   $\leftarrow C \cdot m^{-2}$  et  $\frac{\delta \rho_p}{\delta t} + \text{div } \vec{j}_p = 0$

8.  $\mathcal{H}$  vient  $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$   $\leftarrow C \cdot m^{-3}$

9. M.G.  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_p}{\epsilon_0}$

M.Φ  $\text{div } \vec{B} = 0$

M.F.  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$

M.A.  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_p + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}$

M.G.  $\text{div } \vec{E} = -\frac{\text{div } \vec{P}}{\epsilon_0} = -\text{div} \left( \frac{\epsilon_0 \underline{\chi}}{\epsilon_0} \vec{E} \right)$  donc  $\underline{\text{div}} \left( (1 + \underline{\chi}) \vec{E} \right) = 0$

M.A.  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{\delta \vec{P}}{\delta t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} = \mu_0 \frac{\delta (\epsilon_0 \underline{\chi} \vec{E})}{\delta t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}$

$\underline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 (1 + \underline{\chi}) \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}$

10. M.G.  $\underline{\text{div}} \left( (1 + \underline{\chi}) \vec{E} \right) = 0 \rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$  avec  $\underline{\chi} \neq -1$

$\hookrightarrow \vec{E}$  transverse

M.Φ.  $\text{div } \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B}$  transverse.

11.  $\underline{\text{rot}} (\underline{\text{rot}} \vec{E}) = \underline{\text{grad}} (\underline{\text{div}} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \underline{\text{rot}} \left( -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \right)$  (M.F.)

$\Delta \vec{E} = \frac{\delta (\underline{\text{rot}} \vec{B})}{\delta t} = \mu_0 \epsilon_0 (1 + \underline{\chi}) \frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta t^2}$  (M.A.)

donc 
$$\Delta \vec{E} - \frac{(1+\chi_e)}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

12. On injecte l'expression de  $\vec{E}$  dans l'équation de propagation. Il vient 
$$k^2 = \frac{1+\chi_e}{c^2} \omega^2 = \frac{\epsilon_r}{c^2} \omega^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2$$

13. Zone de transparence  $\omega Z \ll 1$  donc

$$1 + \chi_e = 1 + \chi_1 + i\chi_2 = \frac{1 + \cancel{\omega^2 Z^2} + \chi_0 - i\omega Z \chi_0}{1 + \cancel{\omega^2 Z^2}} \quad \text{ordre 2}$$

$$1 + \chi_e \sim 1 + \chi_0 - i\omega Z \chi_0$$

donc 
$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_0 - i\omega Z \chi_0)$$

et 
$$|\underline{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{(1 + \chi_0)^2 + (\omega Z \chi_0)^2}$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_0) \sqrt{1 + \left(\frac{\omega Z \chi_0}{1 + \chi_0}\right)^2}$$

$$|\underline{k}|^2 \sim \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_0) \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega Z \chi_0}{1 + \chi_0}\right)^2\right) \quad \text{ordre 2}$$

et 
$$|\underline{k}| \sim \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_0}$$

$\phi = -\arg(\underline{k})$  et  $\underline{k}^2 = |\underline{k}|^2 e^{-2i\phi}$

donc  $-2\phi = \arg(\underline{k}^2) = \arctan\left(-\frac{\omega Z \chi_0}{1 + \chi_0}\right)$

$\Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\omega Z \chi_0}{1 + \chi_0}\right)$

14. Champ  $\underline{E}$  : 
$$\underline{E} = E_0 \exp\{i(\omega t - (k' + ik'')x)\} \vec{u}_y$$

avec  $k' = |k| \cos(-\phi) = |k| \cos \phi$

$k'' = |k| \sin(-\phi) = -|k| \sin \phi$

donc 
$$\underline{E} = E_0 \underbrace{e^{-|k| \sin \phi x}}_{\text{exp } \mathbb{R}} \exp\left[i(\omega t - |k| \cos \phi x)\right] \vec{u}_y \quad \text{exp } \mathbb{C}$$

Champ réel  $\vec{E} = E_0 e^{-|k| \sin \phi x} \cos(\omega t - |k| \cos \phi x) \vec{u}_y$

- onde plane (plans d'onde  $\perp$  ( $Ox$ ))
- progressive (vers  $x \rightarrow$ )
- harmonique ( $\omega$ )
- absorbée (amplitude  $\propto e^{-x/\delta}$ )

15.  $\delta = \frac{1}{|k| \sin \phi}$

16.  $|k| = 447 \text{ m}^{-1}$        $\phi = 0,44^\circ = 0,0076 \text{ rad}$   
 $\delta = 29 \text{ cm}$

L'onde pénètre sur une distance de 29 cm environ. Sur cette distance, l'onde est absorbée par le milieu  $\rightarrow$  chauffage. L'amortissement est faible ( $\omega \tau \ll 1$ ), on évite alors que l'aliment soit trop chauffé en surface et froid au centre.

17.  $\vec{\Pi} = \underbrace{\vec{E} \wedge \vec{B}}_{\mu_0} \longrightarrow$   $\langle \vec{\Pi} \rangle \propto e^{-2x/\delta} \vec{u}_x$

L'énergie électromagnétique est atténuée 2 fois plus vite que  $\vec{E}$ .

**Ex 5**

1. Dans 1 quary dilué: cf ex. 2

$$m \ddot{\vec{r}} = -m \omega_0^2 \vec{r} - e \vec{E} - e \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}_a$$

En régime forcé  $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega t$

Et on a  $\vec{P} = N \vec{p} = -Ne \vec{r}$

donc  $m(\omega_0^2 - \omega^2) \vec{P} = Ne^2 \vec{E} - i\omega e B_a \vec{P} \wedge \vec{u}_z$  (\*)

2. Si  $B_a = 0$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \underbrace{\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}_{\chi_i} \vec{E}$$

3. (\*) s'écrit  $(\omega_0^2 - \omega^2) \vec{P} = \epsilon_0 \omega_p^2 \vec{E} - i \omega \omega_c \vec{P} \wedge \vec{u}_z$

ie  $\epsilon_0 \chi_i \vec{E} = \vec{P} + i\eta \vec{P} \wedge \vec{u}_z$   
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{P} + \begin{pmatrix} 0 & i\eta & 0 \\ -i\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{P}$

donc  $\epsilon_0 \chi_i \vec{E} = \underline{M} \vec{P}$  avec  $\underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & i\eta & 0 \\ -i\eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

inversion de matrice 3x3:

$\det \underline{M} = 1 + (i\eta)^2 = 1 - \eta^2 \neq 0$

• Matrice de mineurs de  $\underline{M}$  :  $\text{mineur}(\underline{M}) = \begin{pmatrix} 1 & -i\eta & 0 \\ i\eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \eta^2 \end{pmatrix}$

• Matrice de cofacteurs :  $\text{mineur}(\underline{M}) \times \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\eta & 0 \\ -i\eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \eta^2 \end{pmatrix}$

• Matrice adjointe :  $\begin{pmatrix} 1 & -i\eta & 0 \\ i\eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \eta^2 \end{pmatrix}$

• Matrice inverse :  $\underline{M}^{-1} = \frac{1}{1 - \eta^2} \begin{pmatrix} 1 & -i\eta & 0 \\ i\eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \eta^2 \end{pmatrix}$

d'où  $\vec{P} = \epsilon_0 \underbrace{\chi_i}_{[\chi]} \begin{pmatrix} 1 & -i\eta & 0 \\ i\eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \eta^2 \end{pmatrix} \vec{E}$

$$4. \quad \vec{D} = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\text{donc} \quad [\epsilon_r] = \mathbb{1} + [\chi]$$

$$[\epsilon_r] = \begin{pmatrix} 1+\chi & -i\alpha & 0 \\ i\alpha & 1+\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1+\chi i \end{pmatrix}$$

Rq: si  $B_a = 0$ ,  $\eta = \alpha = 0 \rightarrow \chi = \chi i$   
 $[\epsilon_r] = \chi i \mathbb{1}$  comme dans un DLH1

$\vec{B}_a$  est la source d'anisotropie.

5.a. On a  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$   
 et  $\text{div} \vec{D} = 0 \rightarrow \vec{D}$  transversal,  $D_2 = 0$

or  $D_2 = \epsilon_0 (1+\chi i) E_2$  d'après la question 4.

donc  $E_2 = 0$  et  $\vec{E}$  transversal,  $E_2 = 0$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} ([\epsilon_r] \vec{E})$$

$$-\frac{n^2 \omega^2}{c^2} \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} [\epsilon_r] \vec{E}$$

$$\underline{[\epsilon_r] \vec{E} = n^2 \vec{E}} \quad \text{équation aux valeurs propres (v.p.)}$$

5.b. Les v.p. de  $[\epsilon_r]$  sont représentées par  $n^2$ . Soit  $N$  v.p. de  $[\epsilon_r]$

$$\begin{vmatrix} 1+\chi - n & -i\alpha & 0 \\ i\alpha & 1+\chi - n & 0 \\ 0 & 0 & 1+\chi i - n \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{i.e.} \quad (1+\chi i - n) \left[ (1+\chi - n)^2 - \alpha^2 \right] = 0$$

} solutions

$$\begin{cases} n_1 = 1+\chi i \\ n_2 = 1+\chi - \alpha \\ n_3 = 1+\chi + \alpha \end{cases}$$

Les v.p. associés sont les champs pouvant se propager dans le flint. On cherche  $\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$

• Si  $n^2 = 1 + \chi + \alpha$

$$\begin{pmatrix} 1 + \chi - n^2 & -i\alpha \\ i\alpha & 1 + \chi - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -i\alpha & -i\alpha \\ i\alpha & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_x + iE_y = 0 \\ iE_x - E_y = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \underline{E_y = iE_x}$$

onde circulaire droite,  $n = n_d$

•  $n^2 = 1 + \chi - \alpha$

De même, on montre que  $E_x = iE_y$  ( $E_y = -iE_x$ )  
onde circulaire gauche,  $n = n_g$

Une onde polarisée circulaire gauche "voit" un indice différent que l'onde polarisée circulaire droite lorsqu'elle traverse le flint. Ces 2 ondes ne se propagent donc pas à la même vitesse.

$$\text{Si } \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz) \\ -\frac{E_0}{2} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{circulaire gauche}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{2} \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{circulaire droite}}$$

$$E_n z=0 \quad \vec{E} = E_0 e^{j\omega t} \vec{e}_x = \frac{E_0}{2} e^{j\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{E_0}{2} e^{j\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_n z=L \quad \vec{E} = \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t - \frac{n_g L}{c})} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t - \frac{ndL}{c})} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{E_0}{2} e^{j\omega t} \left[ \left( e^{-j\frac{ndL}{c}} + e^{j\frac{n_g L}{c}} \right) \vec{e}_x + i \left( e^{-j\frac{ndL}{c}} - e^{j\frac{n_g L}{c}} \right) \vec{e}_y \right]$$

$$= \frac{E_0}{2} e^{j\omega t} \left[ e^{-j\frac{(nd+n_g)L}{2c}} \left( e^{-j\frac{(nd-n_g)L}{2c}} + e^{-j\frac{(ng-nd)L}{2c}} \right) \vec{e}_x \right. \\ \left. + i e^{-j\frac{(nd-n_g)L}{2c}} \left( e^{-j\frac{(nd-n_g)L}{2c}} - e^{-j\frac{(ng-nd)L}{2c}} \right) \vec{e}_y \right]$$

$$\text{donc } \vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{(nd+n_g)L}{2c}\right) \left[ \cos\left(\frac{(nd-n_g)L}{2c}\right) \vec{e}_x + \sin\left(\frac{(nd-n_g)L}{2c}\right) \vec{e}_y \right]$$

La polarisation a tournée d'un angle  $\theta = \frac{(nd-n_g)L}{2c} \omega$