ÉLECTROMAGNÉTISME 5 :
Approximation des Régimes Quasi Stationnaires

École Centrale Pékin

2020-2021

Table des matières

1 Approximation des régimes quasi-stationnaires en physique des ondes **2**
- 1.1 Définition . . . 2
- 1.2 Exemples . . . 3
- 1.3 Conséquence sur les potentiels scalaire et vecteur en électromagnétisme . . . 3

2 Approximations des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme **4**
- 2.1 Expression des ordres de grandeur . . . 4
- 2.2 Prédominance des charges : A.R.Q.S. électrique . . . 5
- 2.3 Prédominance des courants : A.R.Q.S. magnétique . . . 5
- 2.4 Conséquences de l'A.R.Q.S. magnétique . . . 6
- 2.5 Quelques applications usuelles . . . 7

En "basse fréquence", on peut définir un **domaine de l'électromagnétisme intermédiaire** entre le **domaine statique** (cf. Outils mathématiques pour la physique) et le cas le plus **général des ondes électromagnétiques** (cf. Électromagnétisme et Physique des ondes). Ce cadre est défini par **l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires** (A.R.Q.S.) encore appelé **Approximation des Régimes Quasi-Permanents** (A.R.Q.P.). **Lorsque l'A.R.Q.S. est réalisée, on peut conserver les résultats obtenus en régime statique même si les sources sont (lentement) variables dans le temps.**

Nous allons donc développer les points suivants :

- Quelles sont les conditions pour réaliser l'A.R.Q.S. ?
- Comment les relations de l'électromagnétisme sont-elles modifiées dans le cadre de l'A.R.Q.S. ?

1 Approximation des régimes quasi-stationnaires en physique des ondes

1.1 Définition

Soit une onde progressive $u(x,t)$ se propageant dans le sens des x croissant à la célérité c.

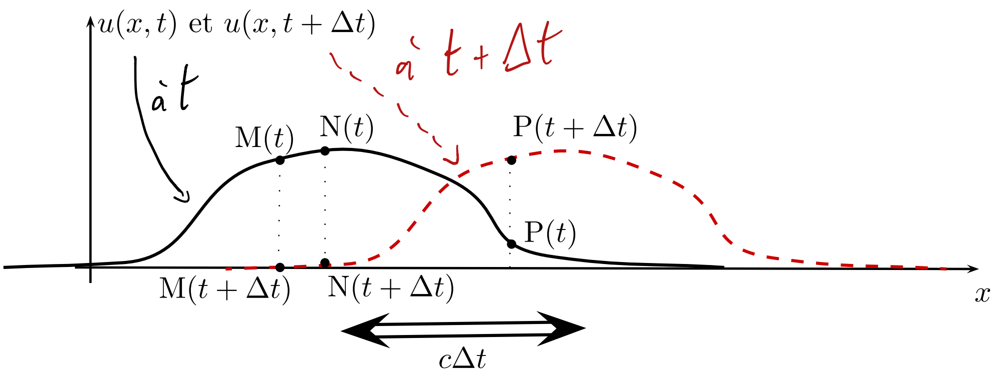


Figure 1 – Propagation d'une onde à la célérité c

On constate que pour toute date :

- $u(M,t) \approx u(N,t)$;
- $u(M,t) \neq u(P,t)$ et $u(N,t+\Delta t) \neq u(P,t+\Delta t)$.

c'est-à-dire que la dépendance spatiale peut être omise si les deux points considérés sont suffisamment proches comme c'est le cas pour N et M.

En physique des ondes, **l'A.R.Q.S. est réalisée lorsque l'on peut négliger le phénomène de propagation** c'est-à-dire lorsque l'on peut écrire que $\forall x \in \mathcal{D}$: $u(x,t) \approx u(t)$. Dans l'exemple précédent, tous les points de l'intervalle $[M;N]$ réalisent l'A.R.Q.S. ; et de manière générale l'A.R.Q.S. est réalisée sur un domaine de longueur D très faible devant la longueur caractéristique L^* de l'onde.

Définition : En physique des ondes, l'A.R.Q.S. consiste à négliger les phénomènes de propagation. Elle est réalisée lorsque l'extension géométrique D du problème envisagé est telle que :

$$\boxed{D \ll cT^*}$$

— T^* est la durée caractéristique des variations temporelles des sources ;

— c est la célérité de l'onde ;

— $L^* = cT^*$ est la longueur caractéristique de la perturbation.

Dans le cas d'une onde progressive harmonique, la dernière condition se réduit à $\boxed{D \ll \lambda}$ où λ désigne la longueur d'onde.

Remarque : On peut définir la grandeur $\epsilon = \dfrac{D}{cT^*}$, l'A.R.Q.S. est alors réalisée pour $\boxed{\epsilon \ll 1}$

1.2 Exemples

Dans les cas suivant, déterminer les fréquences dans pour lesquelles l'A.R.Q.S. est réalisée :

- un circuit électrique de TP d'électrocinétique alimenté par un GBF délivrant une tension sinusoïdale.

$D \sim 1\,m$ $\quad \lambda \gg D \iff f \ll cD \sim 300\,MHz$

ARQS ok

- une ligne électrique transportant l'électricité d'une centrale nucléaire vers une ville.

$D \sim 1\,km$ $\quad \lambda \gg D \iff f \ll 300\,kHz$

$100\,km$ $\quad \lambda \gg D \iff f \ll 3\,000\,Hz$

ARQS ok car $f = 50\,Hz$ en Chine et en France

Dans le cas d'une antenne émettrice grandes ondes avec $f = 180$ kHz, à quelle distance l'A.R.Q.S est-elle valable ?

$f = 180\,kHz \rightarrow$ $\quad \lambda = \dfrac{f}{c} \ll D \iff D \ll 0{,}6\,mm$

ARQS non valable

1.3 Conséquence sur les potentiels scalaire et vecteur en électromagnétisme

Dans le cadre de l'A.R.Q.S., les **potentiels retardés** se simplifient :

$$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{P\in(\mathcal{V})} \frac{\rho(P, t - \cancel{\frac{PM}{c}})}{PM} d\tau \text{ et } \overrightarrow{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P\in(\mathcal{V})} \frac{\overrightarrow{j}(P, t - \cancel{\frac{PM}{c}})}{PM} d\tau$$

L'approximation $\epsilon \ll 1$ ou $D \ll cT^*$ permet donc de simplifier l'expression des potentiels, on retrouve les expressions des potentiels obtenus en électrostatique et magnétostatique vérifiant les deux équations de POISSON :

$$\Delta V \simeq -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \Delta \overrightarrow{A} \simeq -\mu_0 \overrightarrow{j}$$

Preuve :

p.3. chap. 3 $\quad \Delta V - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad \Delta \vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$

En ordre de grandeur : $\dfrac{\Delta V}{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}} \underset{\text{O.G.}}{\sim} \dfrac{\frac{\cancel{V}}{D^2}}{\frac{1}{c^2}\frac{\cancel{V}}{T^2}} \sim \dfrac{c^2 T^2}{D^2} = \dfrac{1}{\varepsilon} \gg 1$

dans l'ARQS

Les relations obtenues sont identiques, **à chaque instant**, à celles qui permettent de calculer les potentiels en régime statique.

2 Approximations des régimes quasi-stationnaires en électromagnétisme

2.1 Expression des ordres de grandeur

Le calcul des champs résultants des potentiels obtenus dans l'A.R.Q.S. est lui un peu plus complexe et dépend du problème.

Ce problème peut être simplifié avec des considérations d'ordre de grandeur. Les équations de Maxwell font intervenir des dérivées spatiales et temporelles des champs.

Les termes $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$ sont homogènes à une dérivée spatiale des champs, par exemple : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\cdot\vec{u}_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$. En notant $\tilde{E}$ et $\tilde{B}$ les valeurs typiques respectives des composantes scalaires des champs et D la distance caractéristique de variation des champs, on obtient en ordre de grandeur :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right\| \approx \frac{\tilde{E}}{D} \quad \text{et} \quad \left\|\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right\| \approx \frac{\tilde{B}}{D}.$$

En plus, la durée caractéristique de variation des champs correspond à la période de l'onde notée T. Les termes $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrivent en ordre de grandeur :

$$\left\|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\| \approx \frac{\tilde{E}}{T} \quad \text{et} \quad \left\|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right\| \approx \frac{\tilde{B}}{T}.$$

Nous définissons par ailleurs les ordres de grandeur de ρ et $\overrightarrow{j}$ en norme : $\tilde{j}$ et $\tilde{\rho}$, respectivement.
Il convient alors de définir le rapport :

$$\boxed{\xi = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c}},$$

on fonction des valeurs de ξ, c'est à dire de la prédominance des courants ou des charges nous allons définir deux A.R.Q.S.

Les différents ordres de grandeurs sont reliés par les équations de Maxwell :

$$\text{Maxwell} - \text{Faraday :} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{E}}{D} \approx \frac{\widetilde{B}}{T}.$$

et

$$\text{Maxwell} - \text{Ampère :} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{B}}{D} \approx \mu_0 \tilde{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\widetilde{E}}{T}.$$

2.2 Prédominance des charges : A.R.Q.S. électrique ($\xi \ll 1$)

Dans le cas où les charges sont prédominantes face aux courants $\tilde{\rho}c \gg \tilde{j}$ on est dans un régime d'A.R.Q.S électrique.

> Dans le cadre de l'A.R.Q.S. électrique le champ $\overrightarrow{E}$ s'écrit $\overrightarrow{E} \simeq -\overrightarrow{grad}\, V$
>
> On a alors $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$, on peut négliger le terme $\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ dans les équations de Maxwell

Preuve : Les equations de Poisson en o.g. : $\frac{\tilde{V}}{D^2} = \frac{\tilde{\rho}}{\varepsilon_0}$ et $\frac{\tilde{A}}{D^2} = \mu_0 \tilde{j}$

$$\frac{\|\overrightarrow{grad}\, V\|}{\|\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\|} \underset{o.G.}{\sim} \frac{T V}{D \tilde{A}} \sim \frac{T}{D} \frac{\tilde{\rho}}{\varepsilon_0 \mu_0 \tilde{j}} \sim \frac{Tc}{D} \frac{c\tilde{\rho}}{\tilde{j}} >>>> 1$$

$\frac{1}{\varepsilon} >> 1$ $\quad \frac{1}{\xi} >> 1$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} << \vec{E} \Rightarrow \frac{D\tilde{B}}{T} << \tilde{E}, \text{ie } \frac{\tilde{B}}{T} << \frac{\tilde{E}}{D}$$

M.F. $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \sim 0$

> Dans le cadre de l'A.R.Q.S. électrique **l'intéraction électrique est prépondérante devant l'intéraction magnétique**

L'A.R.Q.S. électrique est en particulier utilisée dans l'étude des condensateurs à basse fréquence car ils présentent une forte concentration de charge.

> **Les quatre équations de MAXWELL dans l'A.R.Q.S. électrique**
>
> Dans un domaine $\mathcal{D}$ en présence de densité de charges $\rho(M,t)$ et de courants $\vec{j}(M,t)$, les équations de MAXWELL dans le vide s'écrivent :
>
> ① Équation de MAXWELL-GAUSS $\qquad div\, \overrightarrow{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}$
>
> ② Équation de MAXWELL-flux $\qquad div\, \overrightarrow{B}(M,t) = 0$
>
> ③ Équation de MAXWELL-FARADAY $\qquad \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{0}$ ← !
>
> ④ Équation de MAXWELL-AMPÈRE $\qquad \overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0 \overrightarrow{j}(M,t) + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}(M,t)$

2.3 Prédominance des courants : A.R.Q.S. magnétique ($\xi \gg 1$)

Dans le cas où les courants sont prédominants face aux charges $\tilde{j} \gg \tilde{\rho}c$ on est dans un régime d'A.R.Q.S magnétique.

> Dans le cadre de l'A.R.Q.S. magnétique le champ $\overrightarrow{B}$ vérifie $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} \simeq \mu_0 \overrightarrow{j}$
>
> On peut négliger le terme $\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ dans les équations de Maxwell

Preuve : M.A. en o.g. → $\frac{\tilde{B}}{D} \underset{o.g.}{\sim} \mu_0 \tilde{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\tilde{E}}{T}$ or M.G. $\frac{\tilde{E}}{D} \underset{o.g.}{\sim} \frac{\tilde{\rho}}{\varepsilon_0}$

→ $\frac{\tilde{B}}{D} \underset{o.g.}{\sim} \mu_0 \tilde{j} + \mu_0 \frac{\tilde{\rho} D}{T}$ $\quad$ Et $\frac{\mu_0 \tilde{j}}{\mu_0 \tilde{\rho} \frac{D}{T}} = \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}} \frac{T}{D} >>>> 1$

$>> c \qquad >> 1/c$

Dans le cadre de l'A.R.Q.S. magnétique **l'intéraction magnétique est prépondérante devant l'intéraction électrique**

L'A.R.Q.S. magnétique est en particulier utilisée dans l'étude des phénomènes d'induction, très présent en électrotechnique. On peut notamment utiliser cette approximation dans les bobines à basse fréquence où se concentrent de forts courant.

Les quatre équations de Maxwell dans l'A.R.Q.S. magnétique

Dans un domaine $\mathcal{D}$ en présence de densité de charges $\rho(M,t)$ et de courants $\vec{j}(M,t)$, les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

① Équation de Maxwell-Gauss $\quad div\ \vec{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}$

② Équation de Maxwell-flux $\quad div\ \vec{B}(M,t) = 0$

③ Équation de Maxwell-Faraday $\quad \overrightarrow{rot}\ \vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M,t)$

④ Équation de Maxwell-Ampère $\quad \overrightarrow{rot}\ \vec{B}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t)$!

L'A.R.Q.S. magnétique de par ses bien plus grandes applications est l'approximation la plus souvent utilisée, à tel point que par abus de langage on parle d'A.R.Q.S. pour désigner l'A.R.Q.S. magnétique.

Nous allons dans les parties qui suivent détailler quelques résultats propres à l'A.R.Q.S. magnétique qui nous serviront dans le prochain chapitre d'induction.

2.4 Conséquences de l'A.R.Q.S. magnétique

2.4.1 Équation locale de conservation de la charge dans l'A.R.Q.S.

Dans l'A.R.Q.S. magnétique l'équation locale de conservation de la charge sécrit :

$$\boxed{div\ \vec{j}(M,t) = 0}$$

Le vecteur $\vec{j}(M,t)$ est donc à flux conservatif comme en statique (on peut donc parler de l'intensité «traversant un contour», envisager la loi des nœuds).

Preuve : $div\ \vec{j} = div\left(\dfrac{\overrightarrow{rot}\ \vec{B}}{\mu_0}\right) = 0$

2.4.2 Relations champ magnétique-sources

Dans l'A.R.Q.S. magnétique certaines lois de la magnétostatique sont valables :

- la loi de Biot et Savart : $\vec{B}(M,t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int_{P\in(\Gamma)} \dfrac{I(P,t)d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3}$
- le théorème d'Ampère : $\displaystyle\oint_{M\in(\Gamma)} \vec{B}(M,t).d\vec{\ell} = \mu_0 \underbrace{\iint_{M\in(S)} \vec{j}(M,t).d\vec{S}(M)}_{I(t)}$

En effet, dans l'A.R.Q.S. magnétique le champ magnétique est décrit par les mêmes équations locales que le champ magnétostatique (à ceci près que le champ est désormais une fonction du temps). En effet, les mêmes valeurs de $div\ \vec{B}$ et de $\overrightarrow{rot}\ \vec{B}$ en régimes stationnaire et quasi-stationnaire conduisent aux mêmes lois intégrales.

2.4.3 Relation champs-potentiels

Dans l'A.R.Q.S. magnétique les relations champs-potentiels s'écrivent :

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}(M,t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E}(M,t) = -\overrightarrow{grad}\ V(M,t) - \frac{\partial \vec{A}(M,t)}{\partial t}}$$

Ainsi le champ magnétique se calcule de la même manière en régime statique et dans l'A.R.Q.S. En revanche, le champ électrique de l'A.R.Q.S. magnétique est différent du champ électrique en régime statique.

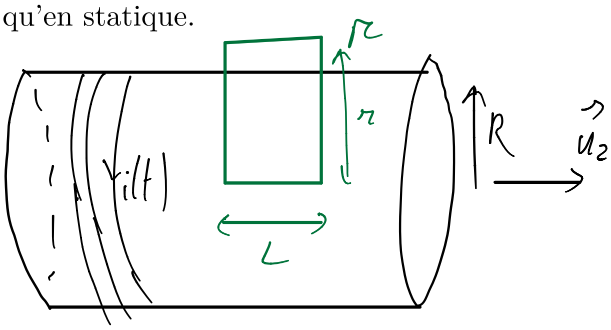
Preuve : $$\frac{\left\|\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right\|}{\left\|\overrightarrow{grad} V\right\|} \underset{o.g.}{\sim} \frac{D\tilde{A}}{T\tilde{V}} \sim \frac{D}{Tc} \quad \frac{\tilde{j}}{c\tilde{e}} \rightarrow \text{indéterminée}$$

$\varepsilon \ll 1$ $\quad$ $\varepsilon \gg 1$

2.5 Quelques applications usuelles

2.5.1 Solénoïde infini parcouru par un courant $i(t)$ variable

Dans l'A.R.Q.S. magnétique, le champ magnétique créé par un solénoïde infini d'axe z'z parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ et possédant n spires par unité de longueur, se calcule de la même façon qu'en statique.

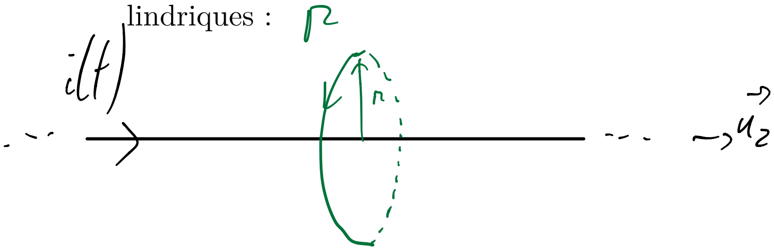


Théorème d'Ampère appliqué à Γ

$$\begin{cases} \vec{B}_{int}(M,t) = \mu_0 n\, i(t)\ \vec{u}_z \\ \vec{B}_{ext}(M,t) = \vec{0} \end{cases}$$

2.5.2 Fil infini parcouru par un courant $i(t)$ variable

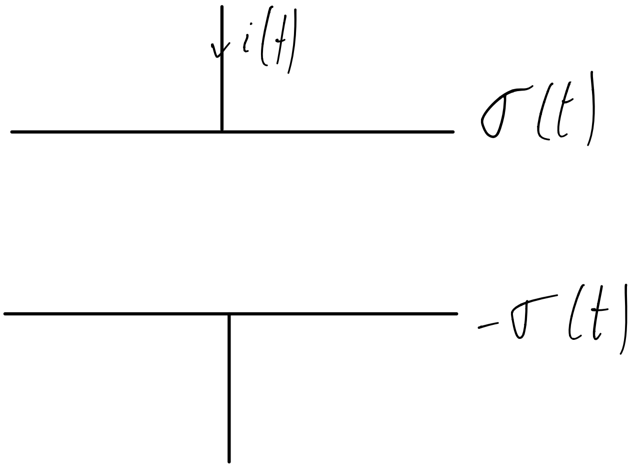
De même, dans l'A.R.Q.S. magnétique, le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant $i(t)$ (l'orientation étant selon $+\vec{u}_z$) a la même expression qu'en statique en coordonnées cylindriques :



$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

2.5.3 Capacité d'un condensateur (A.R.Q.S. électrique)

Dans le cadre de l'A.R.Q.S. électrique, les relations établies en statique pour le condensateur persistent.



Théorème de Gauss

$$\begin{cases} \vec{E}_{int}(M,t) = \dfrac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \\ \vec{E}_{ext}(M,t) = \vec{0} \end{cases}$$