

ÉLECTROMAGNÉTISME 6 :

Induction électromagnétique

École Centrale Pékin

2020-2021

Table des matières

1	Circuit fixe dans un champ magnétique variable - induction de Neumann	2
1.1	Mise en évidence expérimentale : Expérience de FARADAY (1831)	2
1.2	Force électromotrice de Neumann	3
1.3	Calcul pratique de la force électromotrice de Neumann	5
1.4	Loi de Lenz - retour sur l'expérience	6
2	Circuit électrique mobile dans un champ magnétique constant - induction de Lorentz	6
2.1	Mise en évidence expérimentale : Expérience du rail de Laplace	6
2.2	Force électromotrice de Lorentz	7
2.3	Loi de Lenz et calcul pratique de la force électromotrice de Lorentz	8
2.4	Loi de Faraday	11
3	Synthèse du phénomène d'induction	12
4	Phénomène d'auto-induction et d'induction mutuelle	13
4.1	Inductance propre : phénomène d'auto-induction	13
4.2	Cas de deux circuits en interaction : phénomène d'induction mutuelle	16

Le phénomène d'**induction électromagnétique** est le nom donné à l'**apparition de courants, dits induits, dans un circuit électrique fermé sous l'effet d'un champ magnétique.**

Dans tout ce chapitre, nous nous placerons dans le cadre de l'**approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique** que nous nommerons par abus de langage simplement ARQS : le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ sera déterminé en tout point M et à tout instant t par application des lois de la **magnétostatique**, ce qui suppose a priori qu'on n'étudie que des champs à variation suffisamment lente.

1 Circuit fixe dans un champ magnétique variable - induction de Neumann

1.1 Mise en évidence expérimentale : Expérience de FARADAY (1831)

- **Expérience** : une bobine vide est branchée à un ampèremètre et on approche ou on éloigne le pôle Sud d'un aimant.

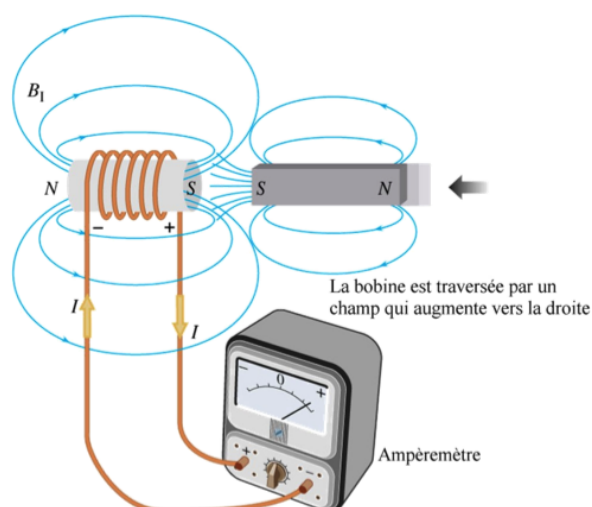


FIGURE 1 – Le pôle Sud de l'aimant va vers la bobine. blah blah blah

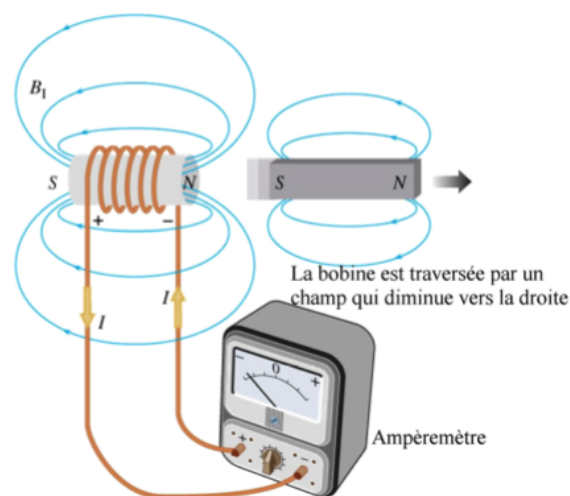


FIGURE 2 – Le pôle Sud de l'aimant s'éloigne de la bobine

- **Observation** : lorsque l'aimant est fixe, il n'y a pas de courant. Par contre, dès que l'aimant bouge, on constate l'apparition d'un courant I :

- lorsqu'on approche l'aimant de la bobine, on constate l'apparition d'un courant électrique dans le circuit dans un sens tel que la bobine présente une face Sud (par où sort le courant) à l'aimant : c'est le cas de la figure 1
- lorsqu'on éloigne de la bobine le pôle Sud de l'aimant, un courant, dont le sens effectif est l'opposé du cas précédent, apparaît de sorte que la bobine présente une face Nord (par où rentre le courant) à l'aimant : c'est le cas de la figure 2

- **Interprétation** : L'aimant crée un champ magnétique permanent. Si l'aimant ne bouge pas, le champ magnétique traversant la bobine est stationnaire : il n'y a pas de courant. Quand l'aimant bouge, le flux du champ magnétique à travers la bobine évolue dans le temps, c'est comme si le champ magnétique variait dans le temps : il y a un courant. Ainsi un courant apparaît si le champ magnétique varie dans le temps.

- **Conclusion** : Un champ magnétique variable dans le temps induit (crée) un courant dans un circuit électrique fixé.

1.2 Force électromotrice de Neumann

1.2.1 Champ électromoteur de Neumann

La variation temporelle du champ magnétique fait apparaître un courant dans le circuit, il y a donc une force qui met en mouvement les électrons.

La composante magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas ($\delta W = \underbrace{(q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}}_{\perp d\vec{l}} = 0$), seul un champ électrique peut mettre des charges en mouvement. Il y a donc un champ électrique créé par la variation de $\vec{B}$. $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

Le champ recherché nous est donné par l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La variation temporelle du champ magnétique crée un champ électrique qui tourne autour de lui.

Le travail W_e de la force électrique reçu par une charge q lors de la circulation le long du circuit fermé (Γ) est :

Rappel : travail élémentaire $\delta W_e = \vec{F}_E \cdot d\vec{l}$

$$W_e = \oint_{(\Gamma)} \vec{F}_E \cdot d\vec{l} = \oint_{(\Gamma)} q \vec{E} \cdot d\vec{l} = q e_N$$

$$e_N = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad [e_N] = \frac{V}{\Omega}$$

Tout se passe comme si les électrons étaient mis en mouvement par un générateur de tension.

$$e_N = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \left(\underbrace{-q \text{grad } V}_{dV} \cdot d\vec{l} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \right) = \oint_{\Gamma} dV - \oint_{\Gamma} \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}}_{\vec{E}_m} \quad \text{champ électromoteur de Neumann}$$

Un circuit fixe dans un champ magnétique $\vec{B}$ variable est le siège d'un phénomène d'induction.

Un courant apparaît dans le circuit comme si un générateur de tension e_N appelée **force électromotrice** mettait en mouvement les électrons. On a :

$$e_N = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

1.2.2 Loi de Faraday

Déterminons le lien entre la force électromotrice de Neumann e_N et le champ magnétique

M.F. $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

th. de Stokes $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$

$$e_N = -\frac{d\phi}{dt}$$

Loi de FARADAY : La f.é.m. induite dans un circuit fermé et orienté est donnée par la loi de FARADAY :

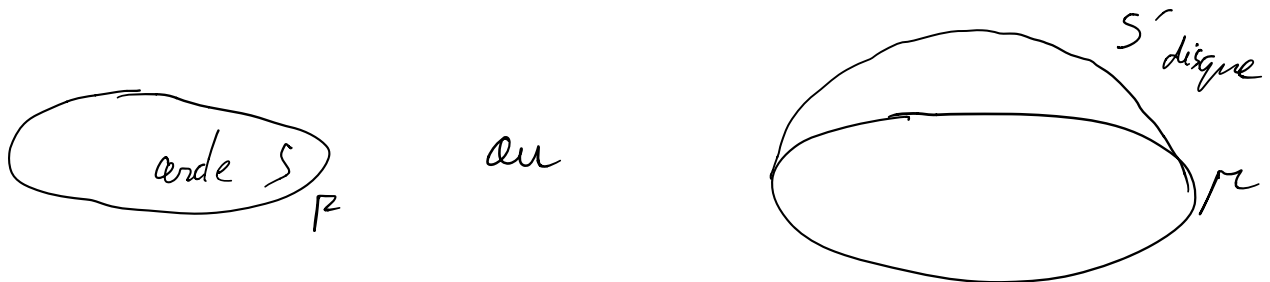
$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où $\phi(t)$ désigne le flux du champ magnétique à travers le circuit à la date t .

C'est la variation du flux du champ magnétique au travers du circuit qui est responsable du phénomène d'induction

Remarque : le choix de la surface Σ s'appuyant sur le circuit $\mathcal{C}$ pour le calcul de ϕ n'a pas d'importance car le champ magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif :

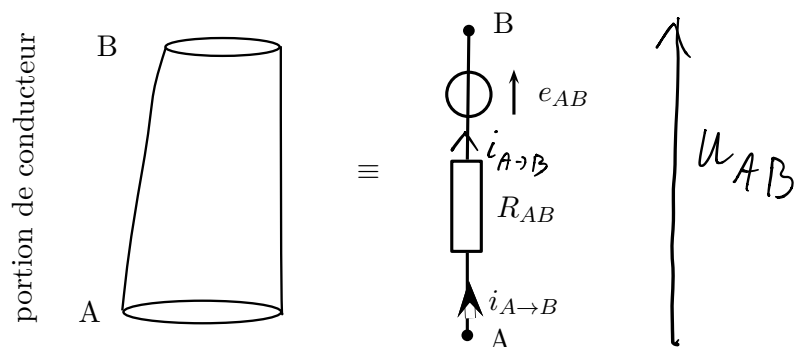
$$\oint_M \vec{B} \cdot d\vec{C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iint_{M \in (\Sigma)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}_{ext}(M) = 0$$



1.2.3 Schéma électrique équivalent

Le phénomène d'induction se traduit par l'apparition d'une f.é.m. induite dans le circuit : on peut donc représenter un circuit électrique équivalent pour rendre compte de ce phénomène.

Considérons une portion d'un circuit conducteur entre les points A et B de résistance R_{AB} soumis au phénomène d'induction : il y a donc un courant i dans le circuit. Électriquement, le phénomène revient à placer un générateur idéal de tension de f.é.m. e orienté en **convention générateur** par rapport à l'orientation du courant **choisie**



$$U_{AB} = V_B - V_A = e_{AB} - R_{AB} i_{A \rightarrow B}$$

Loi d'Ohm généralisée : la différence de potentiel entre deux points A et B d'un conducteur filiforme s'écrit :

$$V(A, t) - V(B, t) = R_{AB} i_{A \rightarrow B}(t) - e_{AB}(t)$$

où :

- la résistance de la portion AB du conducteur s'écrit R_{AB} ;
- l'intensité du courant, le conducteur étant orienté de A vers B, s'écrit $i_{A \rightarrow B}$;
- la force électromotrice (f.é.m.) induite s'écrit $e_{AB}(t) = \int_A^B \vec{E}_m(M, t) \cdot d\vec{\ell}$ où $\vec{E}_m$ est le champ électromoteur mettant en mouvement les porteurs de charge.

1.3 Calcul pratique de la force électromotrice de Neumann

Dans le cas de l'induction de Neumann on a rarement accès à l'expression du potentiel vecteur, c'est donc la loi de Faraday qui sera le plus souvent utilisée pour déterminer la force électromotrice.

Il faut toujours être vigilant pour les orientations des contours, surfaces, f.e.m. Voici un petit récapitulatif des étapes à suivre pour calculer une f.e.m.

1. Orienter arbitrairement le circuit électrique (flèche pour l'intensité)
2. L'orientation de la surface S s'appuyant sur le circuit Γ s'en déduit par la règle de la main droite.
3. Calculer le flux magnétique à travers le circuit :

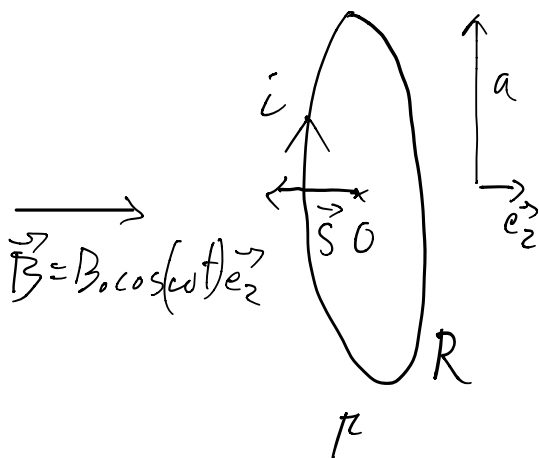
$$\phi(t) = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{(\Gamma)} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

4. La force électromotrice induite dans le circuit, orientée dans le sens conventionnel choisi pour l'intensité (**convention générateur**) est donnée par la loi de Faraday :

$$e_N = - \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{d\phi}{dt}$$

5. Dessiner le schéma électrique équivalent.

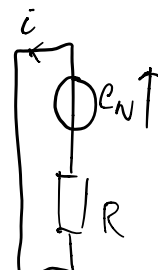
 **Exercice** : On considère une spire circulaire, de centre O, de rayon a , de résistance R et d'axe $(O, \vec{e}_z)$, plongée dans un champ magnétique extérieur de la forme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$. Déterminer le courant parcourant la spire.



$$3. \phi(t) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_0 \cos(\omega t) \pi a^2$$

$$4. e_N = - \frac{d\phi}{dt} = - \omega B_0 \sin \omega t \pi a^2$$

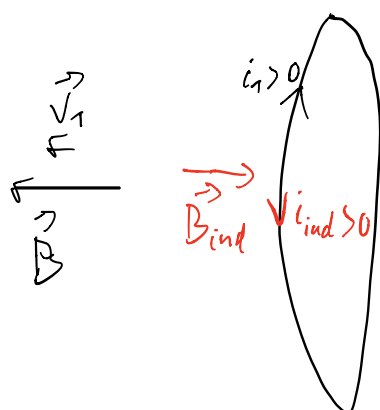
5.



$$e_N = R i$$

$$i(t) = - \frac{\omega B_0 \sin \omega t \pi a^2}{R} < 0$$

1.4 Loi de Lenz - retour sur l'expérience



Loi de LENZ : le phénomène d'induction s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance. Autrement dit, le sens du courant induit est tel que le champ magnétique induit par ce courant tend à s'opposer à la variation du flux magnétique qui a causé l'induction.

Cette loi est une **loi de modération** expérimentale qui permet de prévoir le sens du courant induit, puis de vérifier son signe une fois calcul algébrique effectué.

2 Circuit électrique mobile dans un champ magnétique constant - induction de Lorentz

2.1 Mise en évidence expérimentale : Expérience du rail de Laplace

• **Expérience :** une tige conductrice de longueur a , parallèle à l'axe Oy , est posée sur un circuit conducteur en forme de U relié à un ampèremètre. La tige peut se déplacer librement sans frottement selon la direction $\vec{e}_x$. Le système est plongé dans un champ magnétique permanent $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. On déplace la tige en lui donnant une vitesse $\vec{v}$ selon $\vec{e}_x$.

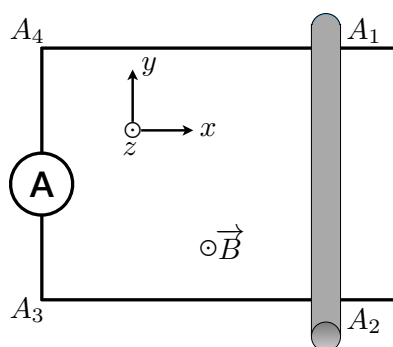


FIGURE 3 – Expérience des rails de LAPLACE

• **Observation :** lorsque la tige est au repos, il n'y a pas de courant mesuré par l'ampèremètre. Par contre, lorsque la tige est en mouvement, on constate l'apparition d'un courant i :

- lorsque la tige se déplace selon $+\vec{e}_x$, le courant est positif et est donc dirigé du point A_1 vers A_2 dans la tige
- lorsque la tige se déplace selon $-\vec{e}_x$, le courant est négatif et est donc dirigé du point A_2 vers A_1 dans la tige

• **Interprétation** : lorsque la tige ne bouge pas, le flux du champ $\vec{B}$ dans le circuit $A_1A_2A_3A_4$ est stationnaire : il n'y a pas de courant. Quand la tige bouge, la surface du circuit est modifiée et le flux du champ $\vec{B}$ varie dans le temps : il y a un courant. Ainsi il y a un courant si le flux du champ magnétique varie dans le temps.

• **Conclusion** : Un champ magnétique permanent dans un circuit variable dans le temps induit un courant dans ce circuit électrique.

2.2 Force électromotrice de Lorentz

2.2.1 Insuffisance de l'équation de Maxwell-Faraday

Dans le référentiel du laboratoire le champ $\vec{B}$ est constant donc l'équation de Maxwell-Faraday donne

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

On a donc

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V \quad \text{et} \quad \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

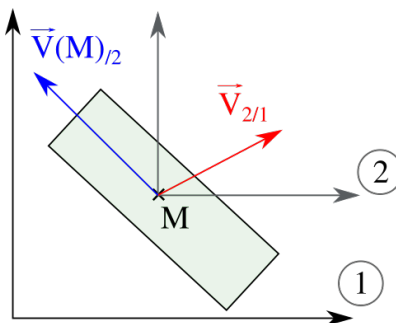
Dans le référentiel du laboratoire, l'équation de Maxwell-Faraday ne suffit pas pour comprendre le phénomène d'induction. Il faut étudier le phénomène dans le référentiel du circuit.

2.2.2 Changement de référentiel

Considérons une particule ponctuelle q située au point M , libre de se déplacer dans le circuit.

Le référentiel 1 est le référentiel du laboratoire. On note $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ la valeur du champ électromagnétique au point M dans le référentiel 1.

Le référentiel 2 est le référentiel du circuit, en translation par rapport à 1 à la vitesse $\vec{v}_e$. On note $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ la valeur de ce champ au point M dans le référentiel 2.



En mécanique newtonienne, les forces sont invariantes par changement de référentiel, on a donc :

$$q \left(\vec{E}_1 + \vec{v}(M)_{/1} \wedge \vec{B}_1 \right) = q \left(\vec{E}_2 + \vec{v}(M)_{/2} \wedge \vec{B}_2 \right)$$

$$\vec{V}(M)_{/1} = \vec{V}(M)_{/2} + \vec{v}_e$$

$$\vec{E}_1 + \vec{V}(M)_{/2} \wedge \vec{B}_1 + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_1 = \vec{E}_2 + \vec{V}(M)_{/2} \wedge \vec{B}_2$$

on identifie

$$\begin{cases} \vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_1 \\ \vec{B}_2 = \vec{B}_1 \end{cases}$$

On note 2 le référentiel en translation par rapport à 1. Dans le cadre de l'ARQS magnétique, les champs électromagnétiques dans 1 et 2 sont liés par :

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_1 \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_1$$

où $\vec{v}_e$ désigne la vitesse d'entraînement de 2 par rapport à 1.

Remarque : Cette transformation des champs est seulement valable dans l'ARQS magnétique et pour un mouvement non relativiste du circuit électrique.

2.2.3 Champ électromoteur de Lorentz

Dans le référentiel du circuit le champ électrique est donc $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$

Le travail W_e de la force électrique reçu par une charge q lors de la circulation le long du circuit fermé (Γ) est :

$$W_e = q \oint_{\Gamma} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = q \oint_{\Gamma} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + q \oint_{\Gamma} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

or $\oint_{\Gamma} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} -q \text{grad} V \cdot d\vec{l} = - \oint_{\Gamma} dV = 0$

d'où $W_e = q \oint_{\Gamma} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ ← *champ électromoteur de Lorentz*

Tout se passe comme si les électrons étaient mis en mouvement par un générateur de tension.

$$W_e = q e_L = q \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

Un circuit mobile dans un champ magnétique $\vec{B}$ constant est le siège d'un phénomène d'induction.

Un courant apparaît dans le circuit comme si un générateur de tension e_L appelée **force électromotrice** mettait en mouvement les électrons. On a :

$$e_L = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

2.3 Loi de Lenz et calcul pratique de la force électromotrice de Lorentz

Dans le cas de l'induction de Lorentz, la cause de l'induction est un mouvement mécanique, la loi de Lenz va donc en théorie apparaître sous la forme d'une force macroscopique, la force de Laplace

2.3.1 Force de Laplace

Dans le cas d'un circuit filiforme parcouru par un courant i et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, chaque élément $d\vec{l}$ du circuit est soumis à la force de Laplace élémentaire :

$$d\vec{F}_{\text{Laplace}} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

où $d\vec{l}$ est orienté dans le sens conventionnel choisi par le courant.

2.3.2 Méthode de calcul pour l'induction de Lorentz

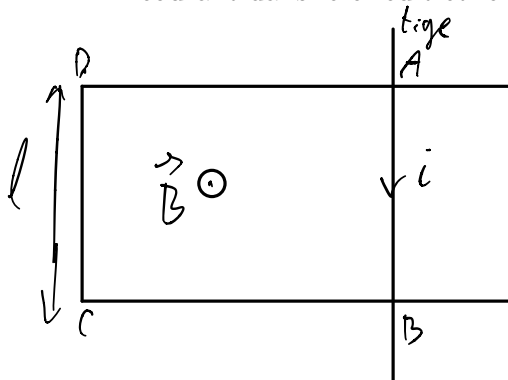
1. Orienter arbitrairement le circuit électrique en choisissant un sens pour le courant i .
2. Déterminer la f.é.m. induite e dans le circuit, orientée **dans le même sens** que i :

$$e = \oint_{(\Gamma)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

3. En déduire le schéma électrique équivalent et l'équation électrique correspondante qui relie le **courant i et la vitesse $\vec{v}_e$** du circuit.
4. En parallèle, faire un bilan des forces sur le circuit en mouvement en tenant compte des forces de LAPLACE
5. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au circuit pour déterminer l'équation mécanique qui **relie le courant i et la vitesse $\vec{v}_e$**
6. À partir des équations électrique et mécanique **couplées** en i et en $\vec{v}_e$, déterminer la vitesse $\vec{v}_e$
7. Vérifier que le résultat est en accord avec la loi de modération de LENZ.



Exercice : Revenons à l'expérience du rail de LAPLACE. Le circuit est constitué de deux rails rectilignes parallèles horizontaux, de résistance négligeable et dont l'écartement est ℓ . Il comprend une résistance R et est fermé d'un côté par une tige parfaitement conductrice de masse m qui peut glisser sans frottement sur les rails. De l'autre côté, une tige rigide de résistance négligeable ferme le circuit. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et stationnaire vertical. À l'instant $t = 0$, il n'y a pas de courant et la tige est lancée avec une vitesse $v_0 \vec{u}_x$ où $v_0 > 0$. Déterminez le courant dans le circuit et le mouvement de la barre. Faire un bilan énergétique.

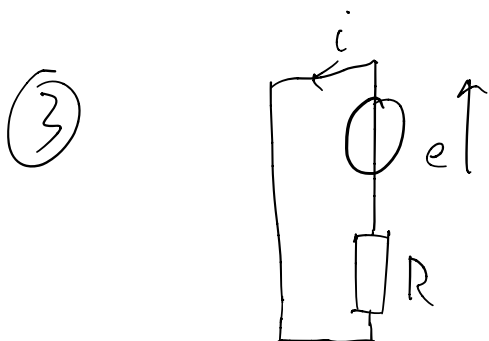


$\mathcal{R}_1$: référentiel du labo.

$\mathcal{R}_2$: " de la tige en mouvement à la vitesse $\vec{V}_{2/1} = \vec{V}_2 = \dot{x} \vec{u}_x$

$$\textcircled{2} \quad e = \oint_{\text{circuit}} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B (\dot{x} \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_z) \cdot dy \vec{u}_y = \int_A^B \dot{x} B dy = \dot{x} B \ell$$

$$\underline{e = \dot{x} B \ell}$$



loi des mailles : $e - Ri = 0$

$$\text{ie} \quad \underline{\dot{x} B \ell = Ri}$$

④ Bilan des forces appliquées à la tige :

- poids $\vec{mg} = -mg \vec{u}_z$
- réaction du support $R = R \vec{u}_z$ (pas de frottements)
- force de Laplace $\vec{F}_L = \int_A^B i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i \int_A^B dy \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z$
 $= iB \int_A^B dy (-\vec{u}_x)$
 $\vec{F}_L = -iBl \vec{u}_x$

⑤ TRD à la tige de masse m :

$$m\vec{a} = \vec{mg} + R + \vec{F}_L \quad \text{or } R = -mg$$

donc $m\vec{a} = \vec{F}_L$, selon $\vec{u}_x$ $m\ddot{x} = -iBl$

⑥ Equations couplées

$$\begin{cases} \dot{x} Bl = Ri \\ m\ddot{x} = -iBl \end{cases}$$

$$\rightarrow m\ddot{x} = -\frac{(Bl)^2}{R} \dot{x} \quad \rightarrow \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} = 0 \quad \text{avec } \tau = \frac{mR}{(Bl)^2}$$

donc $\dot{x} = v(t) = A e^{-t/\tau}$ où $A = v(0) = v_0$

$\vec{F}_L$ constitue ici une force de freinage.

⑦ $i = \frac{Bl}{R} v_0 e^{-t/\tau} > 0$ Lenz ok.

Rq 1 : $v, i \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ La tige s'arrête lorsque $\frac{d\phi}{dt} = 0$

Rq 2 : Bilan énergétique

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \dot{x} m \dot{x} = m \left(-\frac{iBl}{m} \right) \left(\frac{Ri}{Bl} \right) = -Ri^2$$

La perte d'énergie cin. de la tige s'effectue par perte Joule dans R .

Remarque : On peut déterminer la force de Laplace dans l'exemple introductif de l'induction de Neumann et montrer qu'elle respecte aussi la loi de Lenz.

2.4 Loi de Faraday

Nous allons montrer que, dans le cas d'un circuit filiforme, la f.e.m. de Lorentz peut aussi s'exprimer à partir du flux de $\vec{B}$ permanent extérieur.

Pour une portion $\vec{dl}$ de circuit traversé par un courant i et qui baigne dans un champ statique $\vec{B}$, la puissance des actions de Laplace est :

$$\delta \mathcal{P}_{Laplace} = i(\vec{dl} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e,$$

où $\vec{v}_e$ est la vitesse de cette portion de circuit. Pendant la durée dt chaque point M du circuit se déplace de $\vec{du} = \vec{v}_e dt$, et le travail élémentaire des actions de Laplace peut s'écrire en transformant le produit mixte :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

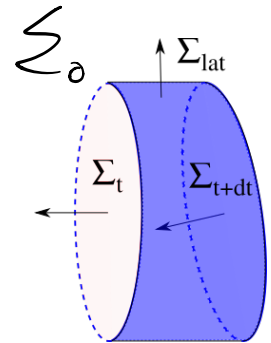
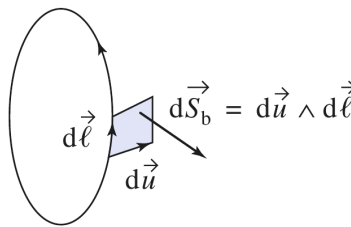
$$\delta W_{Laplace} = i \vec{B} \cdot (\vec{du} \wedge \vec{dl}).$$

Il vient en intégrant sur le circuit fermé de contour Γ :

$$W_{Laplace} = i \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot (\vec{du} \wedge \vec{dl}).$$

$\vec{dS} = \vec{du} \wedge \vec{dl}$ a pour norme l'aire de la surface "balayée" par l'élément de circuit.

Diagramme illustrant la surface balayée par un élément de circuit $\vec{dl}$ se déplaçant de $\vec{du}$. La surface $ABCD$ est un parallélogramme dont l'aire est $A_{ABCD} = 2 A_{ABD}$. L'aire A_{ABD} est donnée par $A_{ABD} = \frac{AD \times BH}{2} = \frac{du \, dl \sin \theta}{2}$. Finalement, $A_{ABCD} = \|\vec{du} \wedge \vec{dl}\|$.



Soit Σ_0 la surface fermée constituée des trois surfaces suivantes :

- Σ_t la surface du circuit à t
- Σ_{t+dt} la surface du circuit à $t + dt$
- $\Sigma_{lat} = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot (\vec{du} \wedge \vec{dl})$ la surface balayée par le circuit pendant dt

Le flux de $\vec{B}$ à travers Σ_0 est nul car $\vec{B}$ est à flux conservatif et peut s'écrire :

$$\oiint_{\Sigma_0} \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\underbrace{\phi(t+dt)}_{\Sigma_{t+dt}} + \underbrace{\phi(t)}_{\Sigma_t} + \underbrace{\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot (\vec{du} \wedge \vec{dl})}_{\Sigma_{lat}} = 0$$

Nous en déduisons :

$$\delta W_{Laplace} = i(\phi(t+dt) - \phi(t)) = i d\phi \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{Laplace} = i \frac{d\phi}{dt}$$

(th. de Stokes)

Comme nous avons montré en 2.3.2 que $\mathcal{P}_{Laplace} = -e_L i$ nous en déduisons :

$$e_L = - \frac{d\phi}{dt}$$

avec ϕ le flux du champ magnétique.

La loi de Faraday est aussi valable dans l'induction de Lorentz.

3 Synthèse du phénomène d'induction

L'induction est l'apparition d'un courant dans un circuit électrique des suites de la variation d'un champ magnétique ou du déplacement d'un circuit dans un champ $\vec{B}$ permanent.

- Le champ électromoteur responsable de la mise en mouvement des électrons s'écrit en fonction de la situation :

$$\begin{aligned} \text{— Neumann : } \vec{E}_m &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \text{— Lorentz : } \vec{E}_m &= \vec{v}_e \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

- Le phénomène d'induction est équivalent à l'apparition d'un générateur de tension dans le circuit, orienté dans le même sens que celui choisi pour le courant et de force électromotrice :

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

- La f.e.m. est reliée à la variation du champ électromagnétique par la **loi de Faraday** :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Le moins traduit la **loi de Lenz** : l'induction s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance.

- Chaque élément d'un circuit $d\vec{l}$ plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumis à la **force de Laplace** élémentaire :

$$d\vec{F}_{Laplace} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

où $d\vec{l}$ est orienté dans le sens choisi pour le courant.

On a de plus un **couplage électro-mécanique**, la puissance électrique fournie au circuit par la f.e.m. est opposée à la puissance mécanique des actions de Laplace :

$$\mathcal{P}_{Laplace} = -ei = -\mathcal{P}_{elec}$$

Remarques :

- Lorsque les deux causes de l'induction interviennent en même temps, le champ électromoteur induit est la superposition des champs électromoteurs de NEUMANN et de LORENTZ :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

dont la circulation sur le circuit Γ donne la f.é.m. induite e .

- L'induction de Neumann et l'induction de Lorentz ne sont en fait qu'un seul et même phénomène physique. Pour l'étudier dans la mécanique Newtonienne nous sommes contraint de séparer ce phénomène en deux artificiellement. Dans le cadre de la relativité la transformation relativiste des champs permet de retrouver l'unicité du phénomène.

4 Phénomène d'auto-induction et d'induction mutuelle

4.1 Inductance propre : phénomène d'auto-induction

4.1.1 Flux extérieur, flux propre, flux total

On a vu que la variation du flux du champ magnétique extérieur $\vec{B}_{ext}(M, t)$ à travers un circuit fermé engendrait un courant induit. Ce courant génère lui-même un **champ magnétique propre** $\vec{B}_{propre}(M, t)$.

Question : Doit-on tenir compte du flux du champ magnétique propre dans l'évaluation du flux du champ magnétique ?

Le flux ϕ du champ magnétique à travers un circuit fermé comprend le flux du **champ magnétique extérieur** (dit "flux extérieur" ϕ_{ext}) et celui du **champ magnétique propre** créé par le circuit lui-même (dit "flux propre" ϕ_{propre}) :

$$\phi(t) = \iint_{M \in (S)} \underbrace{\vec{B}(M, t)}_{\vec{B}_{ext} + \vec{B}_{propre}} \cdot d\vec{S}(M) = \underbrace{\iint_{M \in (S)} \vec{B}_{ext}(M, t) \cdot d\vec{S}(M)}_{\phi_{ext}} + \underbrace{\iint_{M \in (S)} \vec{B}_{propre}(M, t) \cdot d\vec{S}(M)}_{\phi_{propre}}$$

4.1.2 Coefficient d'auto-induction

Définition : Soit un circuit fermé et orienté $\mathcal{C}$ parcouru par un courant d'intensité i (comptée positivement dans le sens de l'orientation de $\mathcal{C}$). Il existe un coefficient L nommé **coefficient d'auto-inductance**, **inductance propre** ou **self** du circuit défini par :

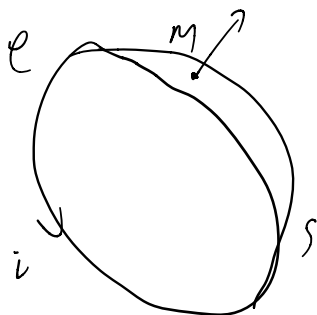
$$\boxed{\phi_{propre} = Li} \quad \text{l'inductance } L \text{ s'exprime en henry (H)}$$

L'inductance propre L :

- ne dépend que de la géométrie du circuit ;
- est positive



En effet,



$$\text{Biot et Savart } \vec{B}(M) = \oint_C \frac{\mu_0 i}{4\pi} d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\phi_{propre} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left[\oint_C \frac{\mu_0 i}{4\pi} d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right] \cdot d\vec{S}$$

$$\phi_{propre} = i \underbrace{\iint_S \left[\oint_C \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right] \cdot d\vec{S}}_L$$



L est constant si le circuit est indéformable mais peut être variable si le circuit est déformable.

4.1.3 Phénomène d'auto-induction

En l'absence de champ magnétique extérieur ($\phi_{ext} = 0$), le phénomène d'induction se produit sous l'effet de la variation de l'intensité du courant dans le circuit. La loi de Faraday s'écrit alors $e(t) = -\frac{d\phi_{propre}}{dt} = -\frac{d(Li(t))}{dt}$. C'est ce phénomène que l'on nomme **phénomène d'autoinduction**

Dans de nombreuses situations $\phi_{ext} \gg \phi_{propre}$ c'est-à-dire $\phi \approx \phi_{ext}$: on dit dans ce cas que le **phénomène d'auto-induction est négligeable**.

 **Exercice :** Déterminer l'expression de l'inductance propre d'un solénoïde de longueur l , de rayon a , constitué de N spires parcourues par un courant i . A partir de quelle valeur du champ extérieur l'auto-induction est négligeable dans un solénoïde par rapport à l'induction "extérieure" ?

On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.s}^{-1}$.

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{u}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

$l \gg a$

flux à travers 1 spire $\phi_1 = BS$
 $S = \pi a^2$

" " le solénoïde : $\phi_{propre} = \phi_1 \times N$

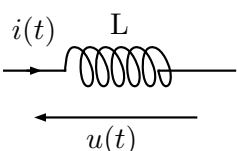
$$\phi_{propre} = \mu_0 \frac{N}{l} i \times S \times N$$

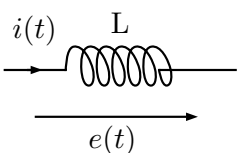
$$L = \frac{\phi_{propre}}{i} = \mu_0 \frac{S}{l} N^2 \propto N^2$$

$$\phi_{ext} \gg \phi_{propre} \Leftrightarrow B_{ext} S \gg L i \Leftrightarrow B_{ext} \gg \frac{\mu_0 N^2 i}{l}$$

Remarque : lien avec l'électrocinétique

Comme nous venons de le voir, il y a des phénomènes d'auto-induction dans la bobine en électrocinétique

• en convention récepteur :  avec $u(t) = L \frac{di}{dt}$

• en convention générateur :  avec $e(t) = -u(t) = -L \frac{di}{dt}$

Si le courant i augmente, alors la quantité $\frac{di}{dt} > 0$ ce qui signifie que la f.é.m. $e = -L \frac{di}{dt} < 0$: elle s'oppose à l'augmentation du courant.

(modération, loi Lenz)

4.1.4 Lien avec l'énergie magnétique

Énergie magnétique $\mathcal{E}_m$ dans le circuit : Soit un circuit filiforme parcouru par un courant i et seul dans l'espace alors

$$\mathcal{E}_m = \iiint_{M \in \mathbb{R}^3} \frac{(\vec{B}(M))^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{1}{2} Li^2 \quad \text{donc } L > 0$$

Cette relation est parfois utile pour calculer L si on connaît l'énergie magnétique du problème.

A défaut de preuve nous pouvons vérifier cette affirmation dans le cas du solénoïde :

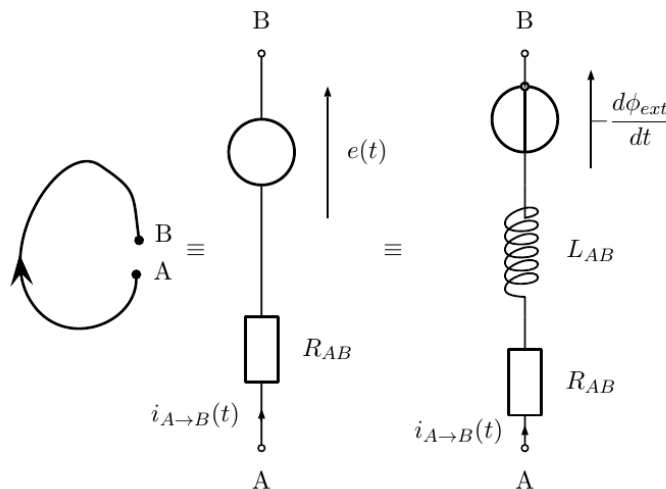
$$u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \rightarrow \mathcal{E}_m = \iiint u_m dZ$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{B^2}{2\mu_0} dZ = \iiint_{\text{solénoïde}} \left(\frac{\mu_0 N i}{l} \right)^2 \frac{dZ}{2\mu_0} = \left(\frac{\mu_0 N i}{l} \right)^2 \frac{S l}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\mu_0 \frac{N^2 S}{l}}_L \right) i^2$$

4.1.5 Autre écriture de la loi d'OHM généralisée

Loi d'OHM généralisée : Pour un circuit dont l'inductance propre L_{AB} est constante, les modélisations électrocinétiques suivantes rendent compte de la loi d'OHM généralisée :

$$V(A, t) - V(B, t) = R_{AB} i_{A \rightarrow B}(t) - e(t) = R_{AB} I_{A \rightarrow B}(t) + L_{AB} \frac{di_{A \rightarrow B}}{dt} + \frac{d\phi_{ext}}{dt}$$



Preuve :

$$e(t) = - \frac{d}{dt} (\phi_{propre} + \phi_{ext})$$

$$= - \frac{d}{dt} (L_{AB} i_{A \rightarrow B} + \phi_{ext})$$

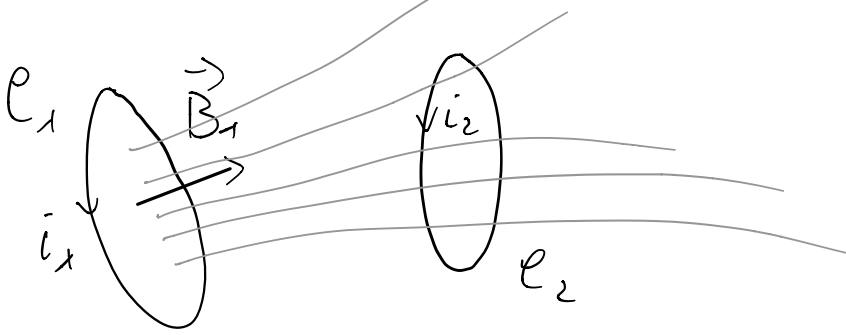
$$e(t) = - L_{AB} \frac{di_{A \rightarrow B}}{dt} - \frac{d\phi_{ext}}{dt}$$

4.2 Cas de deux circuits en interaction : phénomène d'induction mutuelle

4.2.1 Phénomène d'induction mutuelle

Soit un circuit $\mathcal{C}_1$ parcouru par un courant i_1 : un champ magnétique $\vec{B}_1$ est alors créé par i_1 . On considère maintenant en plus, un autre circuit $\mathcal{C}_2$ initialement parcouru par aucun courant. Le circuit $\mathcal{C}_2$ est placé suffisamment proche de $\mathcal{C}_1$ pour être soumis au champ $\vec{B}_1$: $\mathcal{C}_2$ intercepte ainsi les lignes de champs de $\vec{B}_1$ autrement dit, le flux de $\vec{B}_1$ à travers $\mathcal{C}_2$ est non nul : $\Phi_{1 \rightarrow 2} \neq 0$.

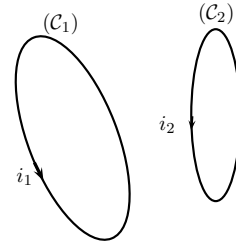
On dit que les deux circuits sont **couplés** : toute variation du courant dans $\mathcal{C}_1$ entraîne une variation du flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ dans $\mathcal{C}_2$ et donc induit un courant dans celui-ci.



4.2.2 Définition des coefficients d'inductance mutuelle

Coefficients d'inductance mutuelle :

Soient deux circuits filiformes orientés $(\mathcal{C}_k)$ (où $k = 1, 2$) parcourus respectivement par des courants d'intensité i_k . Le circuit (k) crée un champ magnétique $\vec{B}_k(M)$.



- Il existe un coefficient M_{12} dit **coefficient d'inductance mutuelle** défini par :

$$\boxed{\phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1} \quad M_{12} \text{ s'exprime en henry (H)}$$

où l'on note $\phi_{1 \rightarrow 2}$ le flux du champ $\vec{B}_1(M)$ à travers le circuit $(\mathcal{C}_2)$:

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{M \in (\mathcal{S}_2)} \vec{B}_1(M) \cdot d\vec{S}$$

- Il existe un coefficient M_{21} dit **coefficient d'inductance mutuelle** défini par :

$$\boxed{\phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} i_2} \quad M_{21} \text{ s'exprime en henry (H)}$$

où l'on note $\phi_{2 \rightarrow 1}$ le flux du champ $\vec{B}_2(M)$ à travers le circuit $(\mathcal{C}_1)$:

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{M \in (\mathcal{S}_1)} \vec{B}_2(M) \cdot d\vec{S}$$

4.2.3 Propriétés des coefficients d'inductance mutuelle

Théorème - Théorème de VON NEUMANN : Les coefficients d'inductance mutuelle M_{12} et M_{21} sont égaux, ce qui permet de définir le coefficient d'**inductance mutuelle** des deux circuits M :

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Le coefficient d'inductance mutuelle M dépend de :

- la **géométrie** (forme et disposition relative) ;
- des **orientations** des circuits (changer l'orientation d'un des deux circuits revient à changer M en $-M$).

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \text{rot } \vec{A}_1 \cdot d\vec{S}$$

théorème de Green - Ostrogradski: $\Phi_{2 \rightarrow 1} = \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1 = \oint_{C_1} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{i_2 d\vec{l}_2}{r} \right] \cdot d\vec{l}_1$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = i_2 \iint_{C_1 \times C_2} \frac{\mu_0}{4\pi r} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

De même $\Phi_{1 \rightarrow 2} = i_1 \iint_{C_1 \times C_2} \frac{\mu_0}{4\pi r} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2$

→ $M_{12} = M_{21} = M$

Orientation : $d\vec{l}_k \rightarrow -d\vec{l}_k \Rightarrow M \rightarrow -M$

4.2.4 Conséquence

Soient deux circuits filiformes orientés (C_k) (où $k = 1, 2$). Le circuit (k) possédant une inductance L_k est parcouru par un courant d'intensité i_k et crée un champ magnétique $\vec{B}_k(M)$. Le champ magnétique total $\vec{B}(M)$ créé par les deux circuits est donc :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$$

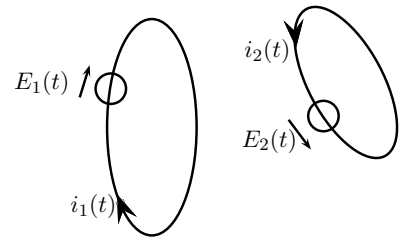
On note ϕ_1 le flux de $\vec{B}(M)$ à travers (C_1) et ϕ_2 le flux de $\vec{B}(M)$ à travers (C_2) avec la relation suivante :

$$\begin{cases} \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_{\text{propre}} + \phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$$

4.2.5 Bilan énergétique de deux circuits couplés par induction

Soient deux circuits (k) (où k désigne 1 ou 2), seuls dans l'espace, alimentés respectivement par un générateur de f.é.m. $E_i(t)$, de résistance totale R_k et d'inductance propre L_k et couplés par une inductance mutuelle M .



Le bilan énergétique s'écrit :

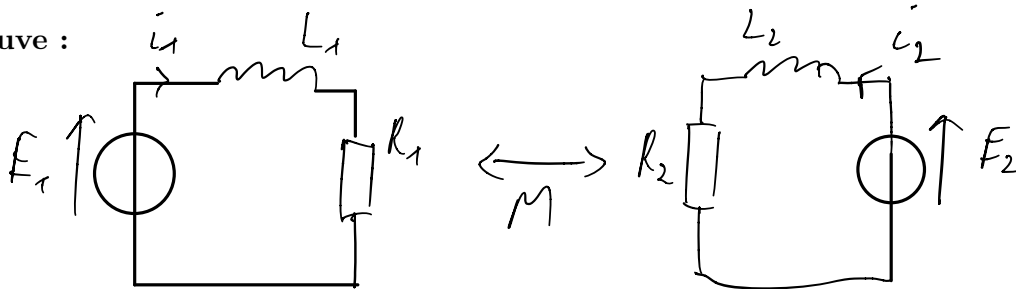
$$\underbrace{E_1 i_1 + E_2 i_2}_{\text{puissance fournie par les generateurs}} = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{puissance dissipée par effet Joule}} + \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}_{\mathcal{E}_m} \right)$$

où $\mathcal{E}_m$ est l'énergie magnétique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 = \iiint_{M \in \mathbb{R}^3} \frac{(\vec{B}(M, t))^2}{2\mu_0} d\tau$$

qui correspond à l'énergie fournie par les générateurs pour créer le champ magnétique.

Preuve :



Loi d'Ohm généralisée pour le circuit 1 :

$$E_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{d\phi_{2 \rightarrow 1}}{dt} \quad (1) \quad \text{avec } \phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

De même pour le circuit 2 :

$$E_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{d\phi_{1 \rightarrow 2}}{dt} \quad (2)$$

$$(1) i_1 + (2) i_2$$

$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \underbrace{L_1 i_1 \frac{di_1}{dt}}_{\frac{1}{2} \frac{d i_1^2}{dt}} + \underbrace{L_2 i_2 \frac{di_2}{dt}}_{\frac{1}{2} \frac{d i_2^2}{dt}} + \underbrace{M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}}_{M \frac{d(i_1 i_2)}{dt}}$$

$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}_{\Sigma_m} \right)$$

4.2.6 Coefficient de couplage entre deux circuits

Soient deux circuits (k) (où k désigne 1 ou 2), seuls dans l'espace, alimentés respectivement par un générateur de f.é.m. $E_i(t)$, de résistance totale R_k et d'inductance propre L_k et couplés par une inductance mutuelle M . On définit le **coefficient de couplage magnétique** m des deux circuits par :

$$m = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq m \leq 1$$

$$m \geq 0 \quad \text{ok}$$

Cas particulier : $m=0$, $M=0$ (pas de couplage)

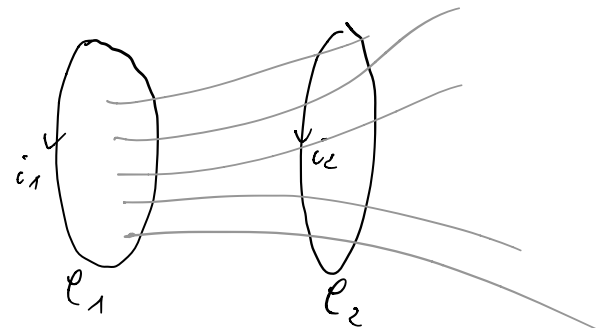
Montrons que $m \leq 1$:

$$m^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{M_{12} M_{21}}{L_1 L_2}$$

$$m^2 = \frac{\cancel{i_1} \Phi_{1 \rightarrow 2}}{\cancel{i_1}} \times \frac{\cancel{i_2} \Phi_{2 \rightarrow 1}}{\cancel{i_2}} \times \frac{\cancel{i_1} \cancel{i_2}}{\Phi_{1 \text{ propre}} \Phi_{2 \text{ propre}}}$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} \leq \Phi_{1 \text{ propre}} \quad (\text{flux de fuite})$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} \leq \Phi_{2 \text{ propre}}$$



$$m^2 \leq 1 \quad \rightarrow \quad \underline{m \leq 1}$$

Cas limite : $m=1$, $M^2 = L_1 L_2$, $\begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2} = \Phi_{1 \text{ propre}} \\ \Phi_{2 \rightarrow 1} = \Phi_{2 \text{ propre}} \end{cases}$
absence de flux de fuite