Travaux dirigés d'Électromagnétisme 4 :
Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique

École Centrale Pékin

2020 – 2021

Application du cours

Exercice 1 : Onde électromagnétique et vitesse dans un D.L.H.I.

On considère une onde électromagnétique de fréquence 1 GHz dont le champ électrique est polarisé rectilignement selon $\overrightarrow{u_y}$ et se propageant selon $\overrightarrow{u_x}$ dans un milieu diélectrique L.H.I. transparent de permittivité relative $\varepsilon_r = 2,56$.

1. Rappeler ce qu'est un milieu D.L.H.I.
2. Que signifie "transparent" pour la permittivité relative et pour l'indice optique du milieu ?
3. Donner alors la relation de dispersion.
4. Calculer la norme du vecteur d'onde. En déduire la longueur d'onde et le domaine du spectre électromagnétique auquel elle appartient.
5. Déterminer le champ magnétique et calculer le rapport des normes des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.
6. En déduire la célérité de l'onde.

Exercice 2 : Indice optique d'un gaz d'hydrogène

Un gaz constitué d'atomes d'hydrogène est soumis à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ de pulsation ω. Pour un atome d'hydrogène, l'électron de masse m et de charge $-e$ est lié au proton par une force de rappel $-m\omega_0^2\overrightarrow{r}$, où $\overrightarrow{r}$ est l'écart par rapport à la position sans champ électromagnétique.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par le mouvement de l'électron
2. Déterminer en régime forcé l'expression du vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$ sachant qu'il y a n_e atomes par unité de volume.
3. En déduire l'expression de la susceptibilité électrique χ_e
4. Donner l'expression de n^2 où n est l'indice optique du milieu
5. On se place dans le domaine visible (le gaz absorbe l'onde électromagnétique dans l'ultraviolet) où l'indice optique est proche de 1. Donner l'expression approchée de $n(\lambda)$ sous la forme :
$$n(\lambda) \sim 1 + A + \frac{B}{\lambda^2}$$
et identifier les constantes A et B en fonction des données du problème.
6. Expérimentalement on établit dans le visible la relation :
$$n(\lambda) = 1 + 1,36 \times 10^{-4} + \frac{1,06 \times 10^{-18}}{\lambda^2}$$
avec λ en mètre. En déduire la valeur de la longueur d'onde d'absorption λ_0. Commenter.

S'entraîner

Exercice 3 : Boule uniformément polarisée

On considère une boule uniformément polarisée ($\vec{P} = P\vec{u}_z$) de rayon R. (On suppose que la boule constitute un milieu D.L.H.I. et que le vecteur polarisation $\vec{P}$ est uniforme sur tout le volume de la boule).

1. Identifier les symétries et invariances du système.
2. Déterminer les densités de charges liées volumique ρ_P et surfacique σ_P de la boule.
3. Montrer que le potentiel électrique vérifie l'équation de Laplace.
4. On cherche le potentiel sous la forme $V(r,\theta) = f(r)\cos\theta$ où f est une fonction radiale de la forme :
$$f(r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^n.$$
Les coefficients a_n sont des nombres réels.
   a) En utilisant l'équation de Laplace, montrer que tous les coefficients a_n sont nuls sauf a_1 et a_{-2}.
   b) Déterminer les potentiels électriques $V_{\mathrm{i}}(r,\theta)$ et $V_{\mathrm{e}}(r,\theta)$ à l'interieur et à l'extérieur de la boule respectivement en fonction de a_1 et a_{-2}.
   c) Déterminer les champs $\vec{E}_{\mathrm{i}}(r,\theta)$ et $\vec{E}_{\mathrm{e}}(r,\theta)$ correspondant. On pourra fixer les coefficients en écrivant la relation de passage du champ électrique en $r = R$.
   d) Ecrire les expressions finales des champs et potentiels électrique en fonction de constantes fondamentales, $\vec{P}$ et R. Commenter.
5. La source de la polarisation uniforme de la boule est un champ électrique extérieur $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_z$ uniforme. Exprimer le vecteur polarisation $\vec{P}$ en fonction de $\vec{E}_0, \chi_e$ et ϵ_0.

L'expression du gradient d'un champ scalaire $V(r,\theta,\varphi,t)$, dans la base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}V(r,\theta,\varphi,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\,\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

En coordonnées sphériques, le laplacien scalaire agissant sur le champ $V(r,\theta,\varphi)$ s'écrit :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Exercice 4 : Chauffage par micro-onde

On considère de l'eau, constituée de molécules polaires de moment moment dipolaire $\overrightarrow{p}$. On considère qu'un dipôle de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ fait un angle α avec la direction d'un champ $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}$ uniforme et constant.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle et le champ électrique.
2. En déduire les positions d'équilibre et leur stabilité.
3. A $t = 0^-$, le dipôle, placé dans le champ $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}$, est dans sa position d'équilibre stable. A $t = 0^+$, on inverse le champ électrique $\overrightarrow{E} = -E\overrightarrow{u}$. Le dipôle met un temps τ pour atteindre sa nouvelle position d'équilibre.

a) Déterminer la variation d'énergie potentielle du dipôle lorsqu'il atteint sa nouvelle position d'équilibre (entre $t = 0^+$ et τ).

b) Le champ électrique varie périodiquement de $-E$ à $+E$ à la fréquence $f = 2,45$ GHz tel que $\frac{1}{f} = T \gg \tau$. Dans le cas de l'eau, déterminer l'expression de la puissance volumique cédée au milieu. Commenter. On notera n_d le nombre de dipôles par unité de volume.

Dans un four à micro-ondes, une onde électromagnétique est créée afin de permettre le réchauffement d'aliments. On souhaite étudier la structure d'une micro-onde au cours de la traversée d'un aliment. Le champ est supposé oscillant : $\vec{E}(t) = \vec{E_0}\cos(\omega t)$; $\vec{E_0}$ est un vecteur réel donné.
La propagation d'une micro-onde dans un aliment congelé, qui sera considéré comme un matériau diélectrique homogène, isotrope, dépourvu de courants et charges libres. Dans ce milieu, la polarisation $\vec{P}$ vérifie l'équation suivante en présence d'un champ électrique $\vec{E}$:

$$\tau\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{P} = \epsilon_0\chi_0\vec{E},$$

avec $\tau = 1,0 \cdot 10^{-12}$ s et $\chi_0 = 75$.
L'onde étudiée s'exprime en notation complexe sous la forme : $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\vec{u}$, où E_0 est une constante réelle et $\underline{k} = k_1 + jk_2$ le vecteur d'onde, éventuellement complexe et $\vec{u}$ un vecteur unitaire fixé. Les autres champs comportent un terme de phase similaire.

4. Donner le sens physique de τ.
5. Montrer que la susceptibilité complexe $\underline{\chi}(\omega)$ du milieu diélectrique s'écrit $\underline{\chi}(\omega) = \chi_1(\omega) + j\chi_2(\omega)$, avec
   — $\chi_1(\omega) = \chi_0\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}$, et
   — $\chi_2(\omega) = \chi_0\frac{\beta\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$, où β est à expliciter.
6. Donner l'allure des courbes $\chi_1(\omega)$ et $\chi_2(\omega)$. Faire intervenir les valeurs χ_0 et $1/\tau$ sur les tracés. Commenter les cas limites et points particuliers.
7. Rappeler l'expression de la densité volumique de courants liés en fonction de $\vec{P}$. Rappeler l'équation locale de conservation de la charge.
8. En déduire que l'expression de la densité volumique de charges liées ρ_P. Préciser l'unité de ρ_P dans le Système International.
9. Ecrire les équations de Maxwell dans le diélectrique en faisant intervenir uniquement les champs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ et $\underline{\chi_e}$, la susceptibilité complexe.
10. Montrer que les champs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ sont transverses.
11. Etablir l'équation de propagation du champ électrique.
12. On suppose désormais que $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\vec{u}_y$. En déduire la relation de dispersion ($\underline{k}^2$ en fonction de ω, c et $\underline{\chi}$).
13. Dans la zone de transparence (en gardant uniquement les termes en $\omega\tau$ à l'ordre 1), écrire $\underline{k}$ sous la forme $\underline{k} = \mid \underline{k} \mid e^{-j\phi}$. Exprimer $\mid \underline{k} \mid$ et ϕ.
14. En déduire l'expression du champ réel $\vec{E}$ en fonction de $\mid \underline{k} \mid$ et ϕ. Commenter sa forme.
15. Exprimer la longueur d'onde λ de l'onde dans le diélectrique. Ecrire l'amplitude sous la forme $E_0 e^{-x/\delta}$. Identifier et préciser le sens physique de δ.
16. Calculer δ pour $f = 2,45$ GHz. Commenter.
17. Sans faire le moindre calcul, donner la direction du vecteur de Poynting moyen, ainsi que l'expression de sa dépendance par rapport aux variables spatiales.

Pour aller plus loin

Exercice 5 : Effet Faraday dans un Flint

Cet exercice est hors-programme et difficile. Il est cependant très intéressant pour les élèves qui désirent aller plus loin et il traite une application importante pour les milieux diélectriques.
Le flint est une variété de verre optiquement isotrope ; cependant en présence d'un champ magnétique, il acquiert un pouvoir rotatoire donné par la relation $\theta = KB_aL$ où :

— B_a est la projection du champ magnétique sur la direction de propagation,

— L est l'épaisseur du verre traversé par l'onde lumineuse, et

— K est une constante, pour le flint considéré, $K = 15° \cdot \mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-1}$.

Cela signifie que la direction du plan de polarisation d'une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement tourne d'une angle θ après avoir traversé le verre.
On peut traiter les atomes dans le matériau dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié. Pour un atome donné, on note $\vec{r}$ la position d'un électron de masse m et de charge $-e$ par rapport à sa position d'équilibre. La force de rappel exercée par le noyau sur lui vaut $-m\omega_0^2\vec{r}$, ω_0 étant une pulsation. Toute cause d'amortissement est négligée. On note N le nombre d'électrons par unité de volume.
On place le flint dans un champ magnétique uniforme : $\vec{B}_\mathrm{a} = B_\mathrm{a}\vec{u}_z$. On considère que le champ électrique de l'onde lumineuse qui éclaire le flint est plane, progressive (vers les z croissant), harmonique (de pulsation ω) et polarisée selon $\vec{e}_x$. On le suppose uniforme sur la taille de l'atome.

1. Etablir une relation entre le vecteur polarisation $\vec{P}$ et $\vec{E}$ en régime forcé.
2. En notant $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$, la pulsation plasma, établir l'expression de la susceptibilité isotrope χ_i en l'absence de champ magnétique.
3. Reprendre la relation entre $\vec{P}$ et $\vec{E}$ en régime forcé en introduisant ω_p et $\omega_\mathrm{c} = \frac{eB_\mathrm{a}}{m}$, la pulsation cyclotron. Ecrire cette relation sous forme matricielle. Inverser cette matrice afin d'obtenir afin d'obtenir une relation du type : $\vec{P} = \epsilon_0\,[\chi]\,\vec{E}$. On posera $\chi = \frac{\chi_\mathrm{i}}{1-\eta^2}$ où $\eta = \frac{\omega_\mathrm{c}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ et $\alpha = \eta\chi$. Vérifier qu'on obtient :
$$[\chi] = \frac{\chi_\mathrm{i}}{1-\eta^2}\begin{pmatrix} 1 & -i\eta & 0 \\ i\eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\eta^2 \end{pmatrix}$$
4. En déduire la matrice permittivité relative définie par $\vec{D} = \epsilon_0\,[\epsilon_\mathrm{r}]\,\vec{E}$. Quelle est la source d'anisotropie ?
5. On cherche le champ électrique dans le flint sous la forme $\vec{E} = e^{i\omega(t-\frac{n}{c}z)}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$.
   a) A partir des équations de Maxwell et de la relation de la question 4., établir la relation vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$.
   b) A quelle grandeur s'identifie les valeurs propres de la matrice $[\epsilon_\mathrm{r}]$? Quelle est l'expression de ses valeurs propres ? Quel est l'état de polarisation des champs électriques associés ?.
   c) Une onde électrique $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$ entre dans le flint en $z = 0$. Déterminer l'expression de l'onde électrique à la sortie du flint en $z = L$. Déterminer l'angle θ par lequel le champ électrique a tourné après avoir traversé le flint.