Travaux dirigés d'Électromagnétisme 5 :
Induction électromagnétique

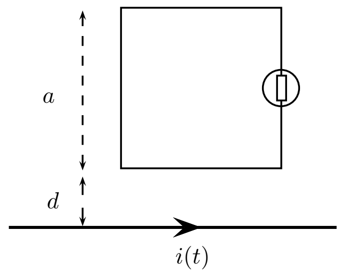
École Centrale Pékin

2020-2021

Application du cours

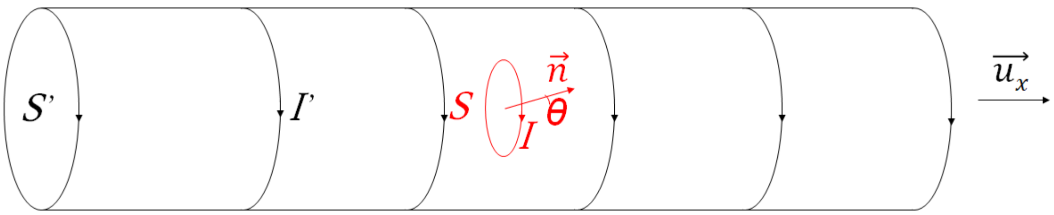
Exercice 1 : Courant induit dans un cadre

Une ligne haute tension transporte un courant sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz et dont l'intensité a pour valeur efficace $I_{eff} = 1,0$ kA. On approche une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30$ cm à une distance $d = 2,0$ cm comme indiqué sur le schéma ci-contre. Cette bobine d'inductance et de résistance négligeables, est fermée sur une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace à ses bornes est supérieure à $U_{eff} = 1,5$ V.



1. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ par créé par le fil rectiligne. On se place dans l'ARQS magnétique.
2. Déterminer le flux magnétique ϕ à travers le cadre.
3. Déterminer la force électromotrice e dans le cadre.
4. Déterminer la tension $u(t)$ aux bornes de la lampe.
5. Déterminer le nombre N de spires nécessaires pour que la lampe s'allume.

Exercice 2 : Règle de flux maximal



On considère un solénoïde de longueur l beaucoup plus grand que son rayon r_0 ($l >> r_0$), parcouru par un courant I' dans lequel on place une spire parcourue par un courant I. Les courants I et I' sont constants et indépendants de la position relative de la spire et le solénoïde. L'axe du solénoïde est orienté selon $\vec{u}_x$; le vecteur $\vec{n}$ est normal à la spire, on note θ l'angle entre ces deux vecteurs. Le solénoïde contient N spires par unité de longueur.

1. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}'$ créé par le solénoïde en tout point de l'espace. Quelle est l'expression de l'inductance propre L' du solénoïde ?

2. Quel est le flux $\phi_{I' \to I}$ de ce champ magnétique $\vec{B}'$ à travers la spire ? En déduire qu'il existe une inductance mutuelle entre le solénoïde et la spire dont on précisera l'expression.
3. Exprimer l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}_{\text{em}}$ stockée dans les deux circuits en fonction des courants et des inductances du système.
4. Il existe un couple électromagnétique qui s'obtient en dérivant l'énergie :

$$\Gamma_{\text{em}} = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{em}}}{\partial \theta}$$

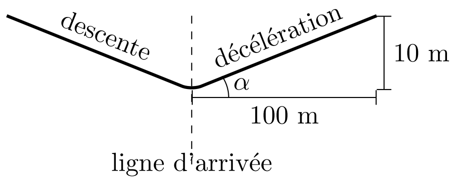
Donner l'expression de Γ_{em} en fonction des données du problème.

5. Noter les valeurs de θ pour lesquelles $\mid \Gamma_{\text{em}} \mid$ est extrémale. Quelles sont les valeurs de $\phi_{I' \to I}$ correspondantes ? Commenter. Identifier en particulier les positions d'équilibre stables et instables.

Exercice 3 : Freinage par induction

Le *skeleton* est un sport qui se pratique dans un couloir de glace en pente : le sportif s'allonge sur une planche qui glisse sur la glace en prenant appui sur des patins. Lorsque la planche franchi la ligne d'arrivée, sa vitesse est $v_a = 30$ m.s^{-1}. On s'intéresse dans ce problème au freinage d'une planche de skeleton après la ligne d'arrivée. Dans tout l'exercice, on négligera les frottements devant les autres forces mises en jeu.

1. **Ralentissement mécanique :**



Le ralentissement à l'arrivée se fait sur une piste inclinée de 10% (on monte de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On note α l'angle d'inclinaison. Déterminer la longueur D de la piste de ralentissement nécessaire pour que la planche passe de v_a à l'arrêt et conclure sur la faisabilité de cette méthode de ralentissement.

2. **Ralentissement par induction :**

On cherche une autre solution pour ralentir la luge : on utilise le freinage par induction. Pour cela, on fixe sous la planche un cadre métallique conducteur ayant la forme d'un rectangle de côtés $\ell \times L$ ($\ell = 50,0$ cm et $L = 100,0$ cm) et de résistance $R = 10^{-3}$ Ω.

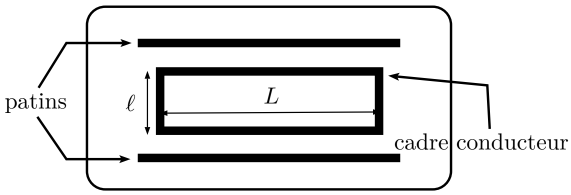


Figure 1 – planche vue de dessous

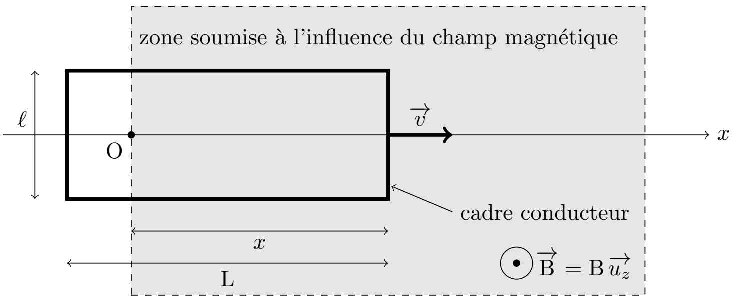


Figure 2 – cadre conducteur entrant dans la zone de freinage

La piste de décélération est horizontale ($\vec{g} = -g\vec{e}_z$). Le cadre se déplace parallèlement à l'axe Ox. Un dispositif crée un champ magnétique $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ stationnaire et uniforme ($B_0 = 1,00$ T) dans la partie $x > 0$ (cf. figure 2). La position du cadre est repérée par l'abscisse $x(t)$ de son extrémité. On suppose que $x(t=0) = 0$ et $\dfrac{dx}{dt}(t=0) = v_a$. L'ensemble { sportif + skeleton } est assimilé à un solide indéformable de masse $m = 1,0 \times 10^2$ kg.

a) Décrire, sans calcul, les différentes phases du mouvement de la planche depuis la ligne d'arrivée jusqu'à ce qu'elle soit entièrement sortie de la zone où règne le champ magnétique (la longueur de la zone est supposée supérieure à L).

b) En utilisant la loi de Faraday, calculer la f.é.m. induite $e(t)$ (pendant la phase où la planche entre dans la zone).

c) En utilisant la notion de champ électromoteur $\overrightarrow{E}_m$, retrouver la valeur de la f.é.m. induite $e(t)$ (pendant la phase où la planche entre dans la zone).

d) Établir l'équation différentielle à laquelle la vitesse $v = \dfrac{dx}{dt}$ est solution (pendant la phase où la planche entre dans la zone). On introduira un temps caractéristique τ faisant intervenir B_0, m, ℓ et R. Résoudre cette équation et obtenir $v(t)$.

e) En déduire $x(t)$ (pendant la phase où la planche entre dans la zone)

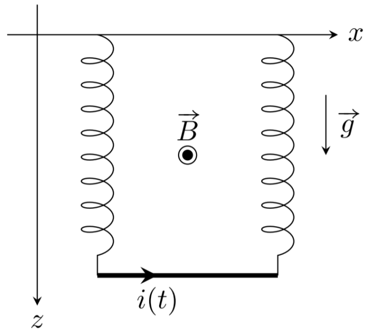
f) Calculer la durée T que met la planche pour pénétrer entièrement dans la zone magnétique.

g) En déduire $\Delta v = v_a - v(T)$. Que signifie Δv ?

h) On installe une alternance de zones magnétiques et non magnétiques. Combien de zones sont nécessaires pour que la vitesse de la planche diminue jusqu'à 5 m.s^{-1} ?

S'entraîner

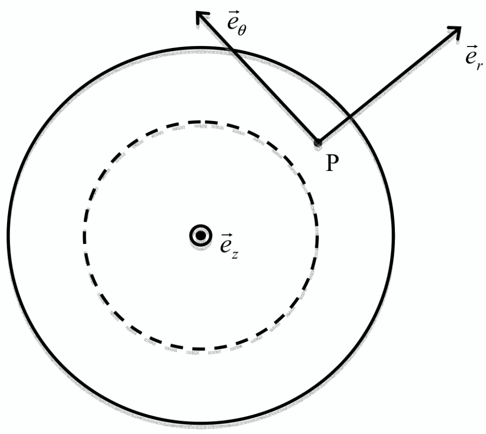
Exercice 4 : Oscillateur amorti par induction



Considérons une barre de masse m et de longueur a, suspendue à deux ressorts conducteurs identiques de raideur k et longueur à vide l_0. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0\vec{u}_y$ uniforme. La barre, les ressorts et le support forment un circuit fermé. On suppose qu'elle reste toujours horizontale.

1. Après avoir fait un bilan des forces appliquées à la barre, appliquer le Principal Fondamental de la Dynamique à la barre et donner l'équation différentielle qui lie la position de la barre $z(t)$, ses dérivées et le courant $i(t)$.
2. Après avoir réalisé le schéma électrique équivalent, déterminer la force électromotrice e du circuit pour en déduire une autre équation différentielle couplée.
3. Faire le bilan énergétique du système. Commenter.
4. A l'instant $t = 0$, on écarte la barre de sa position initiale d'une distance b. Déterminer $z(t)$ et $i(t)$.

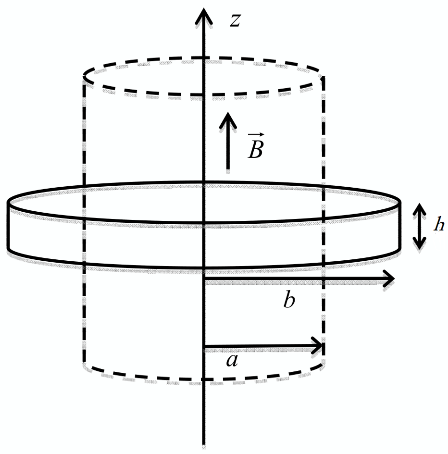
Exercice 5 : Chauffage par induction



Un disque conducteur de conductivité σ, d'axe Oz vertical, de rayon b et d'épaisseur h est plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$. Ce champ magnétique a les caractéristiques suivantes :

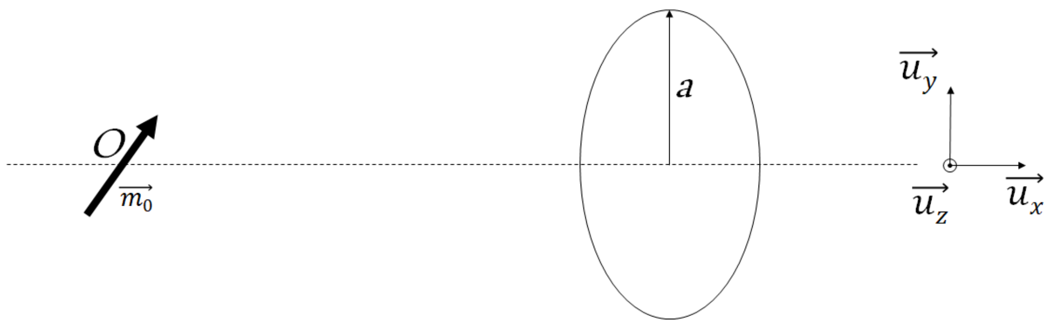
- il est localisé dans un cylindre d'axe vertical Oz de rayon a
- il est uniforme dans ce cylindre et nul à l'extérieur
- il est dirigé verticalement suivant $\overrightarrow{e_z}$
- il varie de façon harmonique dans le temps $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$

On ne tient pas compte du champ induit dans ce problème.



1. Faire une analyse qualitative du problème.
2. On note $\overrightarrow{j} = j(r,t)\overrightarrow{e_\theta}$ le courant volumique induit dans le conducteur. Déterminer $j(r,t)$ en fonction de la circulation C du champ électromoteur sur un contour circulaire de rayon r et d'axe Oz.
3. En écrivant la loi de Faraday, déterminer l'expression de $j(r,t)$. On distinguera les cas où $r < a$ et $a < r < b$. Représenter j en fonction de r.
4. Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule.
5. En déduire la puissance moyenne dissipée dans tout le disque. Commenter.
6. L'échauffement du disque peut être gênante, par exemple dans des appareils électriques qui peuvent s'abimer ou mal fonctionner à haute température. Dans ce cas, on "feuillette" le conducteur. À votre avis, en quoi consiste cette technique et pourquoi cela règle le problème ?

Exercice 6 : Un générateur élémentaire



Un aimant de moment magnétique $\vec{m}_0$ est placé dans le plan (Oxy). Un système mécanique le met en rotation à vitesse anglulaire $\Omega = cste$ autour de l'axe (Oz). Une spire circulaire fixe de rayon a et de résistance R est placée sur l'axe (Ox) à distance $x >> a$. On se place dans l'ARQS magnétique.
En coordonnées polaires d'axe colinéaire à $\vec{m}$, un moment magnétique $\vec{m}$ placé à l'origine crée en un point M quelconque un champ magnétique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta)$$

1. Etude électrique du système :
   a) Déterminer la force électromotrice e dans le circuit.
   b) Faire un schéma électrique équivalent de la spire.
   c) En déduire le courant i qui circule dans la spire.
2. Etude mécanique du système :
   a) Quel est le moment magnétique $\vec{m}_{\text{sp}}$ créé par la spire ?
   b) En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}_{\text{sp}}(O)$ créé par la spire au niveau de l'aimant en rotation.
   c) Exprimer le couple magnétique ($\vec{\Gamma} = \vec{m}_0 \wedge \vec{B}_{\text{sp}}(O)$) subi par l'aimant.
3. Etude énergétique :
   a) Quelle est la puissance électrique $\mathcal{P}_{\text{e}}$ reçue par la spire ?
   b) Exprimer la puissance mécanique $\mathcal{P}_{\text{m}} = -\Gamma\Omega$ à fournir à l'aimant pour le faire tourner à la vitesse angulaire Ω en fonction des données du problème.
   c) A quelle condition sur $\mathcal{P}_{\text{m}}$ et $\mathcal{P}_{\text{e}}$, est-ce que $\Omega = cste$? En quoi est-ce que ce montage constitue-t-il un générateur électrique ?