EQUA. DIFF

Chap 3 - Equations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre

Cours 12 (1)

4 - Equations différentielles linéaires vectorielles du 1er ordre à coefficients constants

$y' = a(t) \cdot y + b(t)$ $\quad a(t) \in \mathcal{L}(E)$ $\quad a : I \to \mathcal{L}(E)$, $t \mapsto a(t)$.

$y' = a \cdot y + b(t)$ $\quad a \in \mathcal{L}(E)$

$Y' = AY + B(t)$ $\quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B(t) \in \mathbb{K}^n$ $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$

1 - Résolution pratique par réduction.

$Y' = AY$

Prop 21. Soit $i \in \{1..n\}$. $\quad \varphi_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$.

$\forall t \in I$, $\varphi_i'(t) = \lambda_i e^{\lambda_i t} V_i$ $\quad AV_i = \lambda_i V_i$

$= e^{\lambda_i t} \lambda_i V_i = e^{\lambda_i t} AV_i = A e^{\lambda_i t} V_i = A\varphi_i(t)$.

Donc φ_i est solution de $Y' = AY$.

$w(0) = |V_1 \dots V_n| = \det(V_1, \dots, V_n) \neq 0$.

$S_H = \mathrm{vect}(\varphi_1 .. \varphi_n) = \{ t \mapsto c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t), (c_1, \dots c_n) \in \mathbb{K}^n \}$.

Ex 22.

$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. $\quad A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Donc 10 est valeur propre de A, de vecteur propre $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

De plus, 1 est valeur propre de A, de vecteur propre $\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$.

Donc $S_H = \left\{ \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) ; t \mapsto c_1 e^{10t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- $\phi'(t) = PDP^{-1}\phi(t) + B(t)$ $\quad (P^{-1}\phi)'(t) = P^{-1}\phi'(t)$

$(P^{-1}\phi)'(t) = DP^{-1}\phi(t) + P^{-1}B(t)$

$\psi'(t) = D\psi(t) + P^{-1}B(t)$.

$\psi : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $t \mapsto \begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \vdots \\ \psi_n(t)\end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix}d_1(t)\\ \vdots \\ d_n(t)\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\psi_1'(t)\\ \vdots \\ \psi_n'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix}d_1(t)\\ \vdots \\ d_n(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = \lambda_1 \psi_1(t) + d_1(t) \\ \quad\vdots \\ \psi_n'(t) = \lambda_n \psi_n(t) + d_n(t) \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} y' = \lambda_1 y + d_1(t) \\ \vdots \\ y' = \lambda_n y + d_n(t) \end{matrix}\right) \text{ n équations scalaires du 1e ordre}$$

On obtient l'expression de $\psi_1, \dots \psi_n$.

$$P^{-1}\phi = \Psi \quad , \quad \phi = P\Psi = P\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}.$$

<u>Ex 23</u> $\quad Y' = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $S_H = \left\{ t \mapsto c_1 e^{10t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}, (c_1,c_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1ère méthode : applique la méthode de variation des constantes

avec $\varphi_1(t) = e^{10t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\varphi_2(t) = e^t\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$.

On cherche φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = \psi_1(t)\,\varphi_1(t) + \psi_2(t)\,\varphi_2(t)$, avec $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables.

Alors φ_p est solution ssi $\psi_1'(t)\,\varphi_1(t) + \psi_2'(t)\,\varphi_2(t) = \begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix}$.

... $\quad S = S_H + \varphi_p$.

- 2ème méthode.

On a $A = P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 10\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}4 & 1\\-5 & 1\end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -1\\5 & 4\end{pmatrix}$

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ dérivable.

Alors ϕ est solution de $Y' = AY + \begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix}$ ssi

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi'(t) = P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 10\end{pmatrix}P^{-1}\phi(t) + \begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix}$

ssi $P^{-1}\phi$ est solution de $Y' = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 10\end{pmatrix}Y + P^{-1}\begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 10\end{pmatrix}Y + \begin{pmatrix}\frac{1}{9}e^t\\ \frac{5}{9}e^t\end{pmatrix}.$$

$Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} y_1' = y_1 + \frac{1}{9}e^t \\ y_2' = 10y_2 + \frac{5}{9}e^t \end{cases}$

(1) $S_{H_1} = \{ t \mapsto \lambda_1 e^t, \lambda_1 \in \mathbb{R} \}$.

$\varphi_p(t) = a t e^t$, $\quad (a + at)e^t = ate^t + \frac{1}{9}e^t$

$a = \frac{1}{9}$.

Donc $S_{A_1} = \{ t \mapsto \lambda_1 e^t + \frac{1}{9}te^t, \lambda_1 \in \mathbb{R} \}$.

Donc $P^{-1}\phi(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + \frac{1}{9} t e^t \\ \lambda_2 e^{10t} - \frac{5}{81} e^t \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$.

D'où $\phi(t) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + \frac{1}{9} t e^t \\ \lambda_2 e^{10t} - \frac{5}{81} e^t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4\lambda_1 e^t + \frac{4}{9} t e^t + \lambda_2 e^{10t} - \frac{5}{81} e^t \\ -5\lambda_1 e^t - \frac{5}{9} t e^t + \lambda_2 e^{10t} - \frac{5}{81} e^t \end{pmatrix}$$

4. Equations différentielles linéaires vectorielles du 1er ordre à coefficients constants

1. Résolution pratique par réduction.

Cours 12 (2)

φ_0 solution complexe de $Y' = AY$

$\overline{\varphi_0}$ solution complexe ———

$\tilde{\varphi}_0 = \dfrac{\varphi_0 + \overline{\varphi_0}}{2} = \mathrm{Re}(\varphi_0)$ ou $\tilde{\tilde{\varphi}}_0 = \dfrac{\varphi_0 - \overline{\varphi_0}}{2i} = \mathrm{Im}(\varphi_0)$ sont des solutions réelles

$\mathrm{Re}(\varphi_0)' = \mathrm{Re}(\varphi_0') = \mathrm{Re}(A\varphi_0) = A\,\mathrm{Re}(\varphi_0)$.

$(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ un système fondamental de solutions complexes de $Y' = AY$.

Notons $\varphi_1, \dots \varphi_r$ les solutions réelles

et $\varphi_{r+1}, \overline{\varphi_{r+1}}, \dots \varphi_p, \overline{\varphi_p}$ solutions complexes non réelles

de sorte que $(\varphi_1, \dots \varphi_n) = (\varphi_1, \dots \varphi_r, \varphi_{r+1}, \overline{\varphi_{r+1}}, \dots \varphi_p, \overline{\varphi_p})$.

Alors $(\varphi_1, \dots \varphi_r, \mathrm{Re}(\varphi_{r+1}), \mathrm{Im}(\varphi_{r+1}), \dots, \mathrm{Re}(\varphi_p), \mathrm{Im}(\varphi_p))$ est un système fondamental de solutions réelles.

$\chi_n = (x-1)(x^2 - 2x + 4)$ $\Delta = -12$, $x_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{12}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$

$= (x-1)(x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3})$ $x_2 = 1 - i\sqrt{3}$

(scindé sur $\mathbb{C}$).

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix}$

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \Pi = \{1, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$.

$1 - \sqrt{3}y = 1 \times (1 + i\sqrt{3})$

$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $E_{1+i\sqrt{3}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$

$y = -i$

, $E_{1-i\sqrt{3}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$.

$S_{R,\mathbb{C}} = \left\{ \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C});\ t \mapsto c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{(1+i\sqrt{3})t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} + c_3 e^{(1-i\sqrt{3})t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right.$,

$(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \}$

Système fondamental de solutions complexes :

$\varphi_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 : t \mapsto e^{(1+i\sqrt{3})t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $\varphi_3 : t \mapsto e^{(1-i\sqrt{3})t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

φ_1 est une solution réelle

φ_2, et φ_3 sont des solutions complexes non réelles et

$\varphi_3 = \overline{\varphi_2}$.

$S_{h,\mathbb{C}} = \mathrm{vect}(\varphi_1, \varphi_2, \overline{\varphi_2})$.

Comme A est une matrice réelle, $\mathrm{Re}(\varphi_2)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_2)$ sont solutions

<u>réelles</u> de $Y' = AY$.

On a $\varphi_2(t) = e^t e^{i\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^t \left(\cos(\sqrt{3}t) + i\sin(\sqrt{3}t)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{Re}(\varphi_2)(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\sqrt{3}t) \\ \sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}(\varphi_2)(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$

On calcule le wronskien en 0 de $(\varphi_1, \mathrm{Re}(\varphi_2), \mathrm{Im}(\varphi_2))$

$$w(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Donc $S_{h,\mathbb{R}} = \Big\{ \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});\ t \mapsto d_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\sqrt{3}t) \\ \sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + d_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$

$(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3 \Big\}$.

$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

$y_1' = y_1 + 2\lambda_2 e^t$

$S_{h_1} = \{ t \mapsto \lambda_1 e^t,\ \lambda_1 \in \mathbb{R} \}$.

$\varphi_p(t) = c t e^t$ $\qquad e^t(c + ct) = cte^t + 2\lambda_2 e^t$

$c = 2\lambda_2$.

Donc $\varphi_p(t) = 2\lambda_2 t e^t$.

$S_2 = \{ t \mapsto \lambda_1 e^t + 2\lambda_2 t e^t,\ \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$.

$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$: $\quad t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + 2\lambda_2 t e^t \\ \lambda_2 e^t \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Donc $P^{-1}\phi(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + 2\lambda_2 t e^t \\ \lambda_2 e^t \end{pmatrix}$

$\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + 2\lambda_2 t e^t \\ \lambda_2 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + 2\lambda_2 t e^t \\ -\lambda_1 e^t - 2\lambda_2 t e^t + \lambda_2 e^t \end{pmatrix}$