

linéaires vectorielles du premier ordre4. Equations différentielles linéaires vectorielles du 1^{er} ordre à coefficients constants
2. Exponentielle de matrice.Cas scalaire
du 1^{er} ordre

à coeff const

$$y' = ay$$

$$t \mapsto \lambda e^{at}$$

à coeff non const

$$y' = a(t)y$$

$$t \mapsto \lambda e^{A(t)} \quad \text{avec } A \text{ primitive de } a$$

Cas vectoriel
du 1^{er} ordre

$$y' = Ay$$

$$t \mapsto \underbrace{e^{tA}}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \cdot \underbrace{C}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

$$y' = A(t)y$$

~~X~~ on ne peut rien dire.

Def 27. $\| \frac{A^n}{n!} \| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$ et $\sum \frac{\|A\|^n}{n!}$ converge.
Donc $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge absolument donc converge.

Prop 28. $\phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{t^n A^n}{n!}}_{u_n(t)} \quad u_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 $t \mapsto \frac{t^n A^n}{n!}$

① $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est $\mathcal{C}^1$ et $u_n'(t) = \begin{cases} \frac{nt^{n-1} A^n}{n!} = \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$

 $\forall t \in \mathbb{R}$

② $\sum u_n(t)$ converge (de somme $\exp(tA)$) donc $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

③ $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Soit $[a, b]$ segment de $\mathbb{R}$. $\eta = \max(|a|, |b|)$, $\forall t \in [a, b]$.

$$\|u_n'(t)\| = \left\| \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} \right\| \leq \frac{|t|^{n-1} \|A\|^n}{(n-1)!} \leq \|A\| \frac{(\eta \|A\|)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Donc $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a, b]$.

Prop 30. $\exp(A) \exp(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}$) Ryp à vérifier

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} A^k B^{n-k}$$

Comme $AB = BA$, $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} A^k B^{n-k}$

$$\exp(A) \exp(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = \exp(A+B).$$

$$\exp(A)\exp(-A) = \exp(A+(-A)) = \exp(0_n) = I_n.$$

A et $-A$
commutent

$$A \times (-A) = -A^2 = (-A) \times A$$

Prop 31.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^n \end{pmatrix}.$$

$$\sum_{n=0}^p \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^p \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n}{n!} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{\lambda_n^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^p \frac{\lambda_1^n}{n!} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{n=0}^p \frac{\lambda_n^n}{n!} \end{pmatrix}$$

$p \rightarrow +\infty$
↓

$$\exp(A)$$

=

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• $A = PBP^{-1}$ $\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$.

$$A^n = \underbrace{PBP^{-1} \times PBP^{-1} \times \dots \times PBP^{-1}}_{n \text{ fois}} = P B^n P^{-1}.$$

$$\sum_{n=0}^p \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^p \frac{P B^n P^{-1}}{n!} = P \underbrace{\sum_{n=0}^p \frac{B^n}{n!}}_{\substack{\downarrow \\ \exp(B)}} P^{-1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} P \exp(B) P^{-1}$$

$\Pi \mapsto P \Pi P^{-1}$ est
continue.

3. Résultats Réciproques .

Cours 13 (2)

$$S_R = \{ \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}); t \mapsto \exp(tA) \cdot C \}$$

$$\text{On a } \exp(-tA)^{-1} = \exp(tA) .$$

Soit A diagonalisable . Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres de A et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées .

Alors $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, où $\varphi_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} v_i$, forme un système fondamental de solutions .

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } P = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$$

$$Y' = AY$$

$$\exp(tA) = P \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1} .$$

$$S_R = \{ \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}); t \mapsto \underbrace{\exp(tA)}_{P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}} C, \quad C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \}$$

$$= \{ \dots ; t \mapsto P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} C}_{C'} , \quad C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \}$$

$$(v_1 | \dots | v_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = (e^{\lambda_1 t} v_1 | \dots | e^{\lambda_n t} v_n) \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{c'_1 e^{\lambda_1 t} v_1}_{\varphi_1(t)} + \dots + \underbrace{c'_n e^{\lambda_n t} v_n}_{\varphi_n(t)} .$$

5. Retour aux Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre n . Cours 13 (2)

(chap 1, "de l'ordre n à l'ordre 1").

φ sol de $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t)$

alors
$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \varphi'' \\ \vdots \\ \varphi^{(n)} \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \\ -a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \dots - a_0(t)\varphi(t) + b(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n-1}(t) & \dots & \dots & \dots & -a_0(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$y' = A y$ avec A matrice compagnon.

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}$$

$$\varphi^{(n)}(t) + a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\varphi'(t) + a_0\varphi(t)$$

$$= \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \right) e^{\lambda t}$$

$= 0$ car λ est racine du polynôme car.

$$P = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n) \text{ avec les } \lambda_i \text{ distincts } 2 \text{ à } 2$$

$$\varphi_i: t \mapsto e^{\lambda_i t} \text{ est solution.} \rightarrow \text{on obtient } n \text{ solutions.}$$

Or S_R est de dimension n . ⚠ Il faut vérifier l'indépendance des φ_i .

Si c'est le cas, $S_R = \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Donc le polynôme caractéristique a 3 racines distinctes 1, 2 et 3,

donc $\varphi_1: t \mapsto e^t$, $\varphi_2: t \mapsto e^{2t}$ et $\varphi_3: t \mapsto e^{3t}$ sont solutions de l'équation.

Soient $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 = 0$,

$$\bullet c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$\bullet c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

$$\bullet c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 0$$

$$c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 3c_3 e^{3t} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

det A : déterminant de Vandermonde. comme 1, 2 et 3 sont distincts, det A $\neq$ 0. Donc $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre. or $\dim S_R = 3$,

donc $S_R = \text{vect}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \varphi'' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \varphi'' \end{pmatrix}$$