

Bilan Equations différentielles

I. Equa diff linéaires (scalaires et vectorielles)

(sous forme résolue $\textcircled{1} y^{(n)} + \dots + a_0(t)y = b(t)$)
 $y' = A(t)y + b(t)$

→ G.L. (si coeff continus) : unicité à tout pble de Cauchy.

→ S_R : ev, S : espace affine

$$S = \varphi_p + S_R$$

Si scalaire d'ordre n , $\dim S_R = n$

Si vectoriel d'ordre 1, avec $A(t) \in \mathcal{M}_n(K)$, $\dim S_R = n$.

→ ppe de superposition des solutions.

• scalaire d'ordre 1.

coeff csts : $y' = ay + b(t)$

$$S_R = \{t \mapsto \lambda e^{at}, \lambda \in K\}$$

Si $b(t) = P(t)e^{at}$, on cherche $\varphi_p(t) = Q(t)t^m e^{at}$
 $\begin{pmatrix} \cos(at) \\ \sin(at) \end{pmatrix}$ avec $d^0 Q = d^0 P$

$$m = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq a \\ 1 & \text{si } a = a \end{cases}$$

ou variation des constantes.

coeff m csts : $y' = a(t)y + b(t)$.

$$S_R = \{t \mapsto \lambda e^{\int_1^t a(s) ds}, \lambda \in K\} \text{ et } A \text{ primitive de } a.$$

Pour trouver φ_p : méthode de variation des constantes.

$$\varphi_p(t) = \psi(t) \varphi_1(t) \text{ avec } \psi \text{ dérivable.}$$

Alors φ_p est sol ssi : $\psi'(t) \varphi_1(t) = b(t)$.

on trouve ψ' , donc ψ , donc φ_p .

• Ordre 2 scalaire.

$$S_R = \text{vect}(\varphi_1, \varphi_2)$$

coeff cst : $ay'' + by' + cy = d(t)$. $ax^2 + bx + c, \Delta$

Si $\Delta > 0$, $\varphi_1(t) = e^{\pi_1 t}$ et $\varphi_2(t) = e^{\pi_2 t}$

Si $\Delta = 0$, $\varphi_1(t) = e^{\pi_1 t}$ et $\varphi_2(t) = te^{\pi_1 t}$

Si $\Delta < 0$, $\varphi_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $\varphi_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

avec les racines complexes $\alpha \pm i\beta$.

Si $d(t) = p(t)e^{\alpha t}$ alors $\varphi_p(t) = \varphi(t)t^m e^{\alpha t}$

avec $d^0 \varphi = d^0 p$ et $m = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ non racine} \\ 1 & \text{si } \alpha \text{ racine simple} \\ 2 & \text{si } \alpha \text{ racine double} \end{cases}$

Si non, appliquer la méthode de variation des constantes

• coeff nn csts : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.

On cherche (φ_1, φ_2) syst fonda de sol de E_R

(pour vérifier l'indépendance : $w(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} \neq 0$.)

Pour trouver φ_1 et φ_2 :

- sol polynomiales

- sol DSE

- $\varphi = \Psi \varphi_1$ avec φ_1 bien choisie qui ne s'annule pas

- $\varphi = \Psi \circ X$ $X \in \mathcal{E}^2$ diff'o.

Si on a trouvé une seule solution φ_1 , on peut appliquer

la technique d'abaissement de l'ordre : $\varphi = \Psi \varphi_1$

Ensuite, si on connaît (φ_1, φ_2) syst fonda de sol de E_R :

on cherche φ_p sous la forme

$$\varphi_p = \psi_1 \varphi_1 + \psi_2 \varphi_2 \quad \text{avec } \psi_1 \text{ et } \psi_2 \text{ dérivables}$$

$$\text{et } \varphi_p' = \psi_1' \varphi_1 + \psi_2' \varphi_2'$$

$$\text{Alors } \varphi_p \text{ est sol ssi } \begin{cases} \psi_1' \varphi_1 + \psi_2' \varphi_2 = 0 \\ \psi_1' \varphi_1' + \psi_2' \varphi_2' = d(t) \end{cases}$$

On trouve ψ_1' et ψ_2' , puis ψ_1 et ψ_2 et donc φ_p .

• Ordre n scalaire : on écrit le pol. car P, on factorise.

Si P admet n racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$S_R = \left\{ t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

ou se ramener à l'ordre 1 vectoriel.

Remarque : si l'équation n'est pas sous forme résolue

$$a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_0(t)y = b(t) \quad \text{et } a_n \text{ s'annule sw I.}$$

⚠ On ne peut pas dire sur la dimension de l'espace des solutions définies sur I .

On résout sur les intervalles sur lesquels a_n ne s'annule (l'équation est alors sous forme résolue) puis raccordements.

- Equations vectorielles d'ordre 1 : $Y' = \underbrace{A(t)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} Y + B(t)$

Alors $\dim = n$.

On cherche un syst fondamental de sol de E_R $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

$$(W = \det_{\mathbb{R}}(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \neq 0)$$

→ Si $A(t)$ non constant, pas de méthode générale.

→ Si A est constante

$$S_R = \left\{ t \mapsto \underbrace{e^{tA}}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \cdot \underbrace{C}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \right\}$$

↳ Si A est diagonalisable, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses

valeurs propres, $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs propres associés

$$\text{Méthode 1: } S_R = \left\{ t \mapsto \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t}}_{\varphi_1} v_1 + \dots + \underbrace{c_n e^{\lambda_n t}}_{\varphi_n} v_n, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

$$Y' = AY \rightarrow$$

puis méthode de variation des constantes

$$\text{Méthode 2: } A = P D P^{-1}, P = (v_1 \dots v_n), D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$Y' = AY + B(t) \rightarrow Y' = P D P^{-1} Y + B(t)$$

$$(P^{-1} Y)' = D P^{-1} Y + P^{-1} B(t)$$

$$P^{-1} Y \text{ est sol de } X' = D X + P^{-1} B(t).$$

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 + \dots \\ \vdots \\ x_n' = \lambda_n x_n + \dots \end{cases}$$

On en déduit l'ens. des sol.

→ Méthode de variation des constantes. $\phi_i: I \rightarrow \mathbb{K}^n$

On connaît un système funda. de sol $(\phi_1, \dots, \phi_n)$

On cherche ϕ_p sous la forme $\phi_p = \varphi_1 \phi_1 + \dots + \varphi_n \phi_n$

avec $\psi_i: I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables.

ϕ_p est sol ssi $\psi_1' \phi_1 + \dots + \psi_n' \phi_n = b(t)$

On trouve $\psi_1', \dots, \psi_n'$, donc $\psi_1, \dots, \psi_n$ donc ϕ_p .

II. Equa diff non linéaires

$$f: I \times J \rightarrow \mathbb{K}.$$

$$y' = f(t, y) \quad f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \quad \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2.$$

$\hookrightarrow$ Thm de C.L. $f \in C^1$ sur $\Omega \rightarrow$ unicité à tout pble de Cauchy.

$\rightarrow$ Equat^o à var s^ep: $\frac{y'}{h(y)} = g(t)$, puis intégrer

Trouve l'int de déf des solutions maximales

(+ autonomes)

$\rightarrow$ Bernoulli $\rightarrow$ se ramener à une Equation linéaire.

$\rightarrow$ Etude qualitative. φ_m solution max

$\hookrightarrow$ unicité au pble de Cauchy? $f \in C^1$ sur Ω ?

$\hookrightarrow$ parité? φ_m paire? impaire?

$$\Psi(t) = \begin{cases} \varphi_m(-t) & \text{pour montrer que } \varphi_m \text{ paire} \\ -\varphi_m(-t) & \dots \dots \dots \text{impaire} \end{cases}$$

On vérifie que Ψ vérifie l'équation et $\Psi(t_0) = \varphi_m(t_0)$

Alors $\Psi = \varphi_m$.

$\hookrightarrow$ monotonie? On regarde le signe de φ_m'
 $= f(t, \varphi_m(t))$

$\hookrightarrow$ intervalle de déf de φ_m , les limites aux bornes de l'intervalle.
 $I_m =]a, b[$

$\rightarrow$ On utilise le théorème des bords.

Si $b < +\infty$ et si $\varphi \xrightarrow[b]{} c < +\infty$ avec

$(b, c) \in \Omega$ alors φ peut être prolongée.

Par ex, pour montrer que $I_m = \mathbb{R}$, suppose par l'abs

que $b < +\infty$, montrer que φ_m a une limite ℓ en b (par ex, $\varphi \uparrow$ et majorée)

Donc absurde. Pour montrer que I_m est borné, soit par l'absurde

Si I_m est borné, on a $\varphi_m \rightarrow \frac{1}{b} \infty$ (si $\Omega = \mathbb{R}^2$)

Si $I_m = \mathbb{R}$, on intègre $\varphi_m' = f(t, \varphi_m)$.

$$\varphi_m(t) = \varphi_m(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi_m'(s) ds = \varphi_m(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_m(s)) ds$$

- EDP au programme.