Corrigé du TD n° 10

Équations différentielles

29 novembre 2020

Exercice 1.

1. (a) Calculer une primitive de
$$]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ u \longmapsto \frac{1}{1-u^2}.$$

   (b) En déduire une primitive de
$$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}.$$

   On pourra effectuer le changement de variables « $u=\sin(t)$ » .

2. Déterminer un système fondamental de solutions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle
$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y.$$

3. En déduire l'ensemble des solutions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle
$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(t) \end{pmatrix}.$$

---

1. (a) Pour tout $u \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-u}$.

   Donc, une primitive de $u \longmapsto \dfrac{1}{1-u^2}$ est $u \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(|1+u|) - \dfrac{1}{2}\ln(|1-u|) = \dfrac{1}{2}\ln(1+u) - \dfrac{1}{2}\ln(1-u)$.

   (b) Pour tout $t \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,
$$\begin{aligned}\int_0^t -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x &= -\int_0^t \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^t \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

   Donc, par le changement de variables « $u=\sin(x)$ » de classe $\mathcal{C}^1$,
$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x &= -\int_0^{\sin(t)} \frac{u^2}{1-u^2}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\sin(t)} 1\mathrm{d}u - \int_0^{\sin(t)} \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u \\ &= \sin(t) - \frac{1}{2}\ln(\sin(t)+1) + \frac{1}{2}\ln(1-\sin(t)).\end{aligned}$$

2. Soit $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$ une application de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$ est solution de l'équation si et seulement si

$$\begin{cases}\varphi_1' = \varphi_2\\ \varphi_2' = -\varphi_1\end{cases}.$$

φ_2 étant de classe $\mathcal{C}^1$, φ_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\varphi_1'' = \varphi_2'$.
Donc $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$ est solution si et seulement si

$$\begin{cases}\varphi_1' = \varphi_2\\ \varphi_1'' = -\varphi_1\end{cases}.$$

Donc $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$ est solution de l'équation si et seulement s'il existe $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases}\varphi_1 = \lambda_1\cos+\lambda_2\sin\\ \varphi_2 = -\lambda_1\sin+\lambda_2\cos\end{cases}.$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}\cos\\ -\sin\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}\right)$ engendre donc l'espace vectoriel des solutions de l'équation $Y = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}Y$, qui est, d'après le cours, de dimension 2. C'est donc une base.
On en déduit que $\left(\begin{pmatrix}\cos\\ -\sin\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}\right)$ forme un système fondamental de solutions de l'équation $Y = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}Y$.

3. Appliquons la méthode de variations des constantes pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre. Posons $\Phi_1 = \begin{pmatrix}\cos\\ -\sin\end{pmatrix}$ et $\Phi_2 = \begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}$. Alors (Φ_1,Φ_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène.
On cherche une solution particulière $\varphi_p : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ sous la forme $\varphi_p = \psi_1\Phi_1 + \psi_2\Phi_2$ où ψ_1 et ψ_2 sont des applications dérivables de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.
Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si

$$\psi_1'\Phi_1 + \psi_2'\Phi_2 = \begin{pmatrix}0\\ \tan\end{pmatrix},$$

soit encore, si et seulement si,

$$\begin{cases}\psi_1'\cos+\psi_2'\sin = 0\\ -\psi_1'\cos+\psi_2'(t)\sin = \tan\end{cases}.$$

Donc φ_p est solution de l'équation si et seulement si

$$\begin{cases}\psi_1' = -\dfrac{\sin^2}{\cos}\\ \psi_2' = \sin\end{cases}.$$

Choisissons par exemple, pour ψ_1 et ψ_2 les fonctions définies pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par

$$\begin{cases}\psi_1(t) = \sin(t) + \dfrac{1}{2}\ln(1+\sin(t)) - \dfrac{1}{2}\ln(1-\sin(t))\\ \psi_2(t) = -\cos\end{cases}.$$

La fonction $\varphi_p : t \longmapsto (\sin(t) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right))\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\end{pmatrix} - \cos(t)\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$ est alors une solution particulière de l'équation.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \;;\; t\longmapsto \lambda_1\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right)\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\end{pmatrix} \mid (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2}.$$

- Identification : Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu sur $\mathbb{R}$.
- Solutions de l'équation homogène : Le polynôme caractéristique est $X^2+4X+4 = (X+2)^2$, de racine double -2. L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $y''+4y'+4y = 0$ est donc

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \;;\; t\longmapsto(\lambda_1+\lambda_2 t)\mathrm{e}^{-2t} \mid (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

– Solution particulière de l'équation : Appliquons la méthode de variations des constantes. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ et $\varphi_2(t) = t\mathrm{e}^{-2t}$. D'après le point précédent, la famille (φ_1, φ_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène (puisqu'elle engendre l'espace vectoriel des solutions qui est de dimension 2, ou on peut aussi calculer le wronskien en 0 par exemple).

  On cherche une solution particulière φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = \psi_1(t)\varphi_1(t)+\psi_2(t)\varphi_2(t)$ où ψ_1 et ψ_2 sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $\varphi_p'(t) = \psi_1(t)\varphi_1'(t) + \psi_2(t)\varphi_2'(t)$.

  Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \psi_1'(t)\varphi_1(t) + \psi_2'(t)\varphi_2(t) = 0 \\ \psi_1'(t)\varphi_1'(t) + \psi_2'(t)\varphi_2'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}}{1+t^2} \end{cases},$$

  soit encore si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \psi_1'(t)\mathrm{e}^{-2t} + \psi_2'(t)t\mathrm{e}^{-2t} = 0 \\ -2\psi_1'(t)\mathrm{e}^{-2t} + \psi_2'(t)\mathrm{e}^{-2t}(1-2t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2} \end{cases}.$$

  Donc φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = -t\psi_2'(t) \\ -2\psi_1'(t) + \psi_2'(t)(1-2t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases},$$

  soit encore, si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = \dfrac{-t}{1+t^2} \\ \psi_2'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}.$$

  Choisissons par exemple, pour ψ_1 et ψ_2 les fonctions définies pour tout $t \in I$ par

$$\begin{cases} \psi_1(t) = -\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2), \\ \psi_2(t) = \arctan(t) \end{cases}.$$

  La fonction $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\mathrm{e}^{-2t} + t\arctan(t)\mathrm{e}^{-2t}$ est alors une solution particulière de l'équation.

– Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + t\lambda_2)\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\mathrm{e}^{-2t} + t\arctan(t)\mathrm{e}^{-2t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 3.

1. Calculer une primitive de

$$t \longmapsto \frac{e^{-t}}{2e^{-2t}+3}.$$

   On pourra effectuer le changement de variables « $u = \mathrm{e}^{-t}$ » .

2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2e^{-2x}+3}.$$

---

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On effectue le changement de variables « $u = e^{-x}$ » de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\mathrm{e}^{-2x}+3}\mathrm{d}x &= -\int_1^{\mathrm{e}^{-t}} \frac{\mathrm{d}u}{2u^2+3} \\ &= -\frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}^{-t}} \frac{1}{(\sqrt{\frac{2}{3}}u)^2+1}\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-t}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}} + \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right). \end{aligned}$$

2. Le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène est $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ de racines réelles distinctes 1 et 2. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2 \mathrm{e}^{2t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Appliquons la méthode de variations des constantes. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^t$ et $\varphi_2(t) = t\mathrm{e}^{2t}$. D'après le point précédent, la famille (φ_1, φ_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène (puisqu'elle engendre l'espace vectoriel des solutions qui est de dimension 2, ou on peut aussi calculer le wronskien en 0 par exemple).

On cherche une solution particulière φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = \psi_1(t)\varphi_1(t) + \psi_2(t)\varphi_2(t)$ où ψ_1 et ψ_2 sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $\varphi_p'(t) = \psi_1(t)\varphi_1'(t) + \psi_2(t)\varphi_2'(t)$.
Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si

$$\begin{cases} \psi_1'\varphi_1 + \psi_2'\varphi_2 = 0 \\ \psi_1'\varphi_1' + \psi_2'\varphi_2' = \dfrac{1}{2e^{-2t}+3} \end{cases},$$

soit encore si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \psi_1'(t)e^t + \psi_2'(t)e^{2t} = 0 \\ \psi_1'(t)e^t + 2\psi_2'(t)e^{2t} = \dfrac{1}{2e^{-2t}+3} \end{cases}.$$

Donc φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = -\dfrac{e^{-t}}{2e^{-2t}+3} \\ \psi_2'(t) = \dfrac{e^{-2t}}{2e^{-2t}+3} \end{cases}.$$

Choisissons par exemple, pour ψ_1 et ψ_2 les fonctions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \psi_1(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \arctan(\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-t}) \\ \psi_2(t) = -\dfrac{1}{4} \ln(2\mathrm{e}^{-2t}+3). \end{cases}.$$

La fonction $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{e}^t - \dfrac{1}{4}\ln(2\mathrm{e}^{-2t}+3)\mathrm{e}^{2t}$ est alors une solution particulière de l'équation.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2 \mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{e}^t - \frac{1}{4}\ln(2\mathrm{e}^{-2t}+3)\mathrm{e}^{2t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 4. Considérons l'équation différentielle

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0. \qquad (E)$$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ de $\mathbb{R}$, avec $R > 0$.

   On précisera la somme des séries entières obtenues.

2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

3. *Bonus* Déterminer l'ensemble des solutions définies sur un intervalle I ne contenant ni 0, ni 1, de l'équation (E).

4. *Bonus* En déduire l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

---

1. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

   La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et pour tout $t \in]-R, R[$, par dérivation terme à terme de la somme d'une série entière, on a

$$\begin{aligned}
x(x-1)f''(x)+3xf'(x)+f(x) &= (x^2-x)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty} 3na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&\text{(changement d'indice } m=n-1)\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n-\sum_{m=1}^{+\infty} (m+1)ma_{m+1}x^m+\sum_{n=1}^{+\infty} 3na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)a_n-n(n+1)a_{n+1}+3na_n+a_n)x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1})x^n.
\end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de l'équation sur $]-R,R[$ si et seulement si pour tout $x\in]-R,R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1})x^n=0,$$

soit, par unicité du développement en série entière de l'application nulle, si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(n+1)^2a_n+n(n+1)a_{n+1}=0. \tag{$*$}$$

La relation ($*$) est vérifiée si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$na_{n+1}=(n+1)a_n,$$

soit encore si et seulement si, $a_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{n+1}{n}a_n\\
&= \frac{n+1}{n}\times\frac{n}{n-1}\times\ldots\times\frac{2}{1}a_1\\
&= (n+1)a_1.
\end{aligned}$$

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n\geq 0}\lambda nx^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $t\longmapsto\dfrac{\lambda x}{(1-x)^2}$.

En effet, la suite $(nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $x\leq 1$ et par dérivation terme à terme de la série entière $\sum_{n\geq 0}x^n$ de somme $x\longmapsto\dfrac{1}{1-x}$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n=x\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n-1}=\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Ainsi, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, l'application

$$]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ x\longmapsto\lambda\frac{x}{(1-x)^2}$$

est solution de l'équation sur $]-1,1[$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation (E) développables en série entière est l'ensemble des fonctions $]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto\dfrac{\lambda x}{(1-x)^2}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

2. D'après la question précédente, l'ensemble des solutions définies sur $]0,1[$, qui sont des restrictions de fonctions développables en série entière de l'équation (E) est $\left\{]0,1[\longmapsto\mathbb{R}\ ;\ x\longmapsto\lambda\dfrac{x}{(1-x)^2}\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}$, espace vectoriel de dimension 1. Or l'équation est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficient continus, sous forme non résolue mais le coefficient de y'' ne s'annule pas sur $]0,1[$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $]0,1[$ est de dimension 2.
Il existe donc des solutions de (E) sur $]0,1[$ qui ne sont pas des restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant ni 0, ni 1.
Résolvons l'équation sur I par la méthode d'abaissement de l'ordre (voir chapitre 2). Posons, pour tout $x\in I$, $\varphi_1(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$. Alors φ_1 est solution de (E) et ne s'annule pas sur $]0,1[$.
Soit φ une application de I dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable. Posons $\psi=\dfrac{\varphi}{\varphi_1}$ de sorte que $\varphi=\psi\varphi_1$. ψ est bien définie et est deux fois dérivables car φ et φ_1 le sont.
Alors φ est solution de (E) si et seulement si (après simplification), pour tout $x\in I$,

$$x(x-1)\varphi_1(x)\psi''(x)+(2x(x-1)\varphi_1'(x)+3x\varphi_1(x))\psi'(x)=0,$$

soit après calculs, si et seulement si ψ' est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = \frac{x-2}{x(1-x)}y.$$

Comme $\frac{x-2}{x(1-x)} = \frac{-2}{x} - \frac{1}{1-x}$, une primitive de $x \longmapsto \frac{x-2}{x(1-x)}$ est $x \longmapsto -2\ln(|x|) + \ln(|1-x|) = \ln(\frac{|1-x|}{x^2})$.
L'ensemble des solutions de $y' = \frac{x-2}{x(1-x)}y$ est donc

$$\mathcal{S}_l = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; t \longmapsto \lambda \frac{1-x}{x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Donc φ est solution sur I de (E) si et seulement si $\psi' \in \mathcal{S}_l$, soit, après primitivation, si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in I$,

$$\psi(x) = \lambda_1 (\frac{1}{x} + \ln(|x|)) + \lambda_2,$$

soit

$$\varphi(x) = \frac{\lambda_1(1 + x\ln(|x|)) + \lambda_2 x}{(1-x)^2}.$$

L'ensemble des solutions définies sur I de (E) est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; x \longmapsto \frac{\lambda_1(1 + x\ln(|x|)) + \lambda_2 x}{(1-x)^2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4. Soit φ une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$. Alors $\varphi_{|]0,1[}$ est solution de l'équation sur $]0,1[$. D'après la question précédente, comme l'intervalle $]0,1[$ ne contient ni 0, ni 1, il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\varphi(x) = \frac{\lambda_1(1 + x\ln(x)) + \lambda_2 x}{(1-x)^2}.$$

φ étant une solution sur $\mathbb{R}$, elle est de deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0 et en 1.
On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \lambda_1$ donc par continuité de φ en 0, $\varphi(0) = \lambda_1$.
De plus, $\varphi(x) \sim_{x \to 1^-} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(1-x)^2}$. Donc, comme φ admet une limite en 1, on a $\lambda_1 = -\lambda_2$.
Enfin, $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{\lambda_1}{(1-x)} + \frac{\lambda_1 \ln(x)}{(1-x)^2} \longrightarrow_{t \to 0^*} \begin{cases} \pm\infty \text{ si } \lambda_1 \neq 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_1 = 0 \end{cases}$. Donc comme φ est dérivable en 0, $\lambda_1 = 0$.
Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et φ est l'application nulle.
Donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{0_{\mathbb{R}}\}$.