Corrigé du TD n° 11

Équations différentielles

7 décembre 2020

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de l'équation

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} Y.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Le rang de A est 1, donc $\dim \ker(A) = 2$. Donc 0 est valeur propre de A de multiplicité au moins 2 et l'espace propre associé à la valeur propre 0 est $E_0 = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

La trace de A est égale à $6 = 0 + 0 + 6$ donc 6 est valeur propre de A. L'espace propre associé à la valeur propre 6 est $E_6 = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

On peut trouver les espaces propres par résolution de système $AX = \lambda X$ par exemple.

Donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et un système fondamental de solutions est $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ où $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{0t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{0t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\varphi_3(t) = \mathrm{e}^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \; ; \; t \longmapsto c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Remarque : on pouvait également calculer χ_A pour déterminer les valeurs propres, mais c'est plus long.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de l'équation

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $\chi_A = (X-1)^2 - 16 = (X+3)(X-5)$. χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}[X]$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres sont -3 et 5.

Un vecteur propre associé à -3 est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur propre associé à 5 est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ une application dérivable. Alors Φ est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi'(t) = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}\Phi(t) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix},$$

soit encore si et seulement si $P^{-1}\Phi$ est solution de l'équation

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} Y + P^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Or $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc Φ est solution de l'équation si et seulement si $P^{-1}\Phi$ est solution du système différentiel

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \\ y_2' = -3y_2 - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \end{cases}.$$

— Résolution de $y_1' = 5y_1 + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y_1' = 5y_1$ est

$$\S_{h,1} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{5t} \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Par le principe de superposition des solutions, on cherche d'abord une solution particulière de $y_1' = 5y_1 + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t}$ sous la forme $\varphi_{p,1}(t) = c\mathrm{e}^{t}$. Après calculs, on trouve $c = \dfrac{-1}{16}$. Donc $\varphi_{p,1}(t) = -\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{t}$.
Puis, on cherche une solution particulière de $y_1' = 5y_1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$ sous la forme $\varphi_{p,2}(t) = c\mathrm{e}^{-3t}$. Après calculs, on trouve $c = -\dfrac{1}{16}$.
Donc l'ensemble des solutions de $y_1' = 5y_1 + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$ est

$$\mathcal{S}_1 = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{5t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}.$$

— De la même façon, l'ensemble des solutions de $y_2' = -3y_2 - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$ est

$$\mathcal{S}_2 = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_2 \mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \mid \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi, Φ est solution de l'équation si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P^{-1}\Phi(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{e}^{5t} - \dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \\ \lambda_2 \mathrm{e}^{-3t} - \dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix},$$

soit

$$\Phi(t) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{e}^{5t} - \dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \\ \lambda_2 \mathrm{e}^{-3t} - \dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t} - t\mathrm{e}^{-3t} \\ -\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} + \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Donc l'ensemble des solutions réelles de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t} - t\mathrm{e}^{-3t} \\ -\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} + \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Remarque : On pourrait également appliquer la méthode de variation des constantes au système fondamental de solutions (Φ_1, Φ_2) *où* $\Phi_1(t) = \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\Phi_2(t) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *On cherche alors une solution particulière sous la forme* $\varphi_p = \psi_1\Phi_1 + \psi_2\Phi_2$. *Alors* φ_p *est solution de l'équation si et seulement si* $\psi_1'\Phi_1 + \psi_2'\Phi_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$. *Etc (voir TD10).*

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de l'équation

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} Y.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique se calcule facilement en développant le déterminant par rapport à la première colonne. On obtient $\chi_A = (X-1)(X^2+1)$. Donc χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme $X^2+1 = (X-i)(X+i)$, χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, de valeurs propres 1, i et $-i$.

Après calculs (par résolution du système $AX = iX$ pour la valeur propre i par exemple), on trouve que les espaces propres associées à ces valeurs propres sont

$E_1 = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_i = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-i} = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ *(E_{-i} se déduit par conjugué car si V est un vecteur propre associé à λ alors la matrice étant à coefficients réels, $\overline{V}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$).*

Posons $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix}$. Alors $(\varphi_1, \varphi_2, \overline{\varphi_2})$ forme un système fondamental de solutions complexes de l'équation.

Ainsi, l'ensemble des solutions complexes de l'équation est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})\ ;\ t \longmapsto c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\overline{\varphi_2(t)} \mid (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 \right\}.$$

Attention, on cherche les solutions réelles.

Remarquons déjà que φ_1 est une solution réelle de l'équation.

Ensuite, puisque φ_2 est une solution complexe non réelle et que M est une matrice réelle, les applications

$$t \longmapsto \operatorname{Re}(\varphi_2)(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t \longmapsto \operatorname{Im}(\varphi_2)(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix}$$

sont alors des solutions réelles de l'équation.

Le calcul du wronskien de $(\varphi_1, \operatorname{Re}(\varphi_2), \operatorname{Im}(\varphi_2))$ en 0 donne

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Donc la famille $(\varphi_1, \operatorname{Re}(\varphi_2), \operatorname{Im}(\varphi_2))$ forme un système fondamental de solutions réelles de l'équation.

Ainsi, l'ensemble des solutions réelles de l'équation est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\ ;\ t \longmapsto d_1\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} \mid (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' = 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2. \end{cases}.$$

On pourra commencer par écrire le système sous forme matricielle et diagonaliser la matrice associée à l'équation.

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix}$.

Alors le système différentiel se réécrit sous la forme $X' = A(t)X$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\chi_{A(t)} = X^2 - (t+1)X + t = (X-1)(X-t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Supposons $t \neq 1$. Alors $\chi_{A(t)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc $A(t)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ de valeurs propres 1 et t. Les espaces propres sont $E_1(A(t)) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_t(A(t)) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Posons $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, matrice indépendante de t. Alors pour tout $t\in\mathbb{R}$ distinct de 1, on a $A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix}P^{-1}$, relation encore vraie pour $t=1$ puisque $A(1)=I_2$.

Soit $\Phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ une application dérivable. Alors Φ est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\Phi'(t)=P\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix}P^{-1}\Phi(t),$$

soit encore, puisque P^{-1} est à coefficients constants (*et donc* $((P^{-1}\Phi)'=P^{-1}\Phi'$), si et seulement si, $P^{-1}\Phi$ est solution de l'équation

$$Y'=\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix}Y,$$

soit finalement si et seulement si $P^{-1}\Phi$ est solution du système différentiel

$$\begin{cases}y_1'=y_1\\ y_2'=ty_2\end{cases}.$$

Les solutions de ce système sont les application

$$\begin{cases}\psi_1(t)=\lambda_1\mathrm{e}^t,\\ \psi_2(t)=\lambda_2\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\end{cases},$$

avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$.

Ainsi, Φ est solution de l'équation si et seulement s'il existe $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$P^{-1}\Phi(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1\mathrm{e}^t\\ \lambda_2\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\end{pmatrix},$$

soit

$$\Phi(t)=P\begin{pmatrix}\lambda_1\mathrm{e}^t\\ \lambda_2\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\end{pmatrix}=\lambda_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Donc l'ensemble des solutions réelles du système différentiel est

$$\mathcal{S}=\left\{\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2\ ;\ t\longmapsto\begin{cases}\lambda_1\mathrm{e}^t+\lambda_2\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\\ \lambda_1\mathrm{e}^t+2\lambda_2\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\end{cases}\mid(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Remarque : En général dans le cas non constant, la matrice de passage P dépend du temps et cette méthode ne s'applique plus.

Exercice 5 (*Facultatif*)**.** On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&3\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer une matrice $P\in\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A=P\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}P^{-1},$$

où a, b et c sont des réels à préciser.

3. En déduire la résolution du système différentiel suivant

$$\begin{cases}x'=-x-4y\\ y'=x+3y\end{cases}.$$

---

1. On a $\chi_A=(X-1)^2$, donc A admet une seule valeur propre 1. Donc A n'est pas diagonalisable car sinon elle serait semblable donc égale à I_2.
2. L'espace propre associé à la valeur propre 1 est $E_1=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right)$.

   La famille $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

   On a $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

   En posant $P=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$, on a donc $A=P\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$.

   D'où le résultat.

3. Le système se ramène à l'équation $Y' = AY$.
Soit $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ une application dérivable. Alors Φ est solution de l'équation si et seulement si

$$\Phi' = P \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}\Phi,$$

soit encore, si et seulement si $P^{-1}\Phi$ est solution de l'équation

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y.$$

Donc Φ est solution de l'équation si et seulement si $P^{-1}\Phi$ du système différentiel

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases}.$$

Les solutions de $y_2' = y_2$ sont les fonctions $t \longmapsto \lambda_2 \mathrm{e}^t$ avec $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Les solutions de $y_1' = y_1 - \lambda_2 \mathrm{e}^t$ sont les fonctions $t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^t - \lambda_2 t \mathrm{e}^t$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
Ainsi, Φ est solution de l'équation si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P^{-1}\Phi(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{e}^t - \lambda_2 t \mathrm{e}^t \\ \lambda_2 \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$, soit

$$\Phi(t) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{e}^t - \lambda_2 t \mathrm{e}^t \\ \lambda_2 \mathrm{e}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2(-2t+1)\mathrm{e}^t \\ -\lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2 t \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Donc l'ensemble des solutions réelles du système différentiel est

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ ; \ t \longmapsto \begin{cases} 2\lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2(1-2t)\mathrm{e}^t \\ -\lambda_1 \mathrm{e}^t + \lambda_2 t \mathrm{e}^t \end{cases} \quad | \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$