Feuille de TD n° 13

Équations différentielles

21 décembre 2020

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g(x,y).$$

où, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $g(x,y) = 0$,
2. $g(x,y) = x + y$,
3. $g(x,y) = f(x,y)$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On pourra effectuer le changement de variables $\begin{cases} u = \dfrac{1}{6}x^2 + y \\ v = x \end{cases}$.

Exercice 3. Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. Justifier que l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow U \ ; \ (r,\theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur U. On donnera la bijection réciproque.

2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur U de l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

3. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur U de l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2+y^2)f(x,y).$$

Exercice 4. On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{1}$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Soient a, b, c et d des réels. Exprimer $D_{(a,b)}(D_{(c,d)}f)$ en fonction de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
2. En déduire que si f est solution de l'équation (1) alors

$$D_{(1,-1)}(D_{(1,-1)}f) = 0.$$

3. Déterminer alors l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation (1) à l'aide d'un changement de variables adapté.