Corrigé du TD n° 13

Équations différentielles

21 décembre 2020

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g(x,y).$$

où, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $g(x,y) = 0$,
2. $g(x,y) = x + y$,
3. $g(x,y) = f(x,y)$.

---

1. Posons $e'_1 = (1,-3)$ et $e'_2 = (0,1)$ de sorte que $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$. On a $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
On effectue donc le changement de variables

$$\begin{cases} x = u \\ y = -3u + v \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u = x \\ v = 3x + y \end{cases}.$$

Considérons alors l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(u,v) \longmapsto (u, -3u+v)$, bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ et de bijection réciproque $\varphi^{-1} : (x,y) \longmapsto (x, 3x+y)$.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On note $\tilde{f}$ l'application définie pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par $\tilde{f}(u,v) = f(u, -3u+v)$. Alors $\tilde{f} = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, -3u+v) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(u, -3u+v).$$

Par surjectivité de φ, on en déduit que f est solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation si et seulement si, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) = 0,$$

soit encore si et seulement s'il existe une application $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\tilde{f}(u,v) = h(v),$$

soit finalement, puisque $\tilde{f} = f \circ \varphi$ et $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$, si et seulement si pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = h\left(3x+y\right).$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ (x,y) \longmapsto h\left(3x+y\right) \mid h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}.$$

2. Avec les notation de la question précédente, f est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = -2u + v.$$

Posons $\tilde{P}(u,v) = -u^2 + uv$. Alors $\tilde{P}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial u}(u,v) = -2u + v$.
Donc f est solution de l'équation si et seulement si

$$\frac{\partial \tilde{f} - \tilde{P}}{\partial u} = 0,$$

soit si et seulement s'il existe $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(u,v) = -u^2 + uv + h(v)$, soit finalement, si et seulement si, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = -x^2 + x(3x+y) + h(3x+y).$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ (x,y) \longmapsto 2x^2 + xy + h\left(3x+y\right) \mid h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}.$$

3. Avec les notations de la question 1, f est solution de l'équation si et seulement $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) = \tilde{f}(u,v)$.
-*Méthode 1 :* Posons $\tilde{g}(u,v) = \mathrm{e}^{-u}\tilde{f}(u,v)$.
Alors $\tilde{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial u}(u,v) = \mathrm{e}^{-u}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) - \tilde{f}(u,v)\right).$$
Donc f est solution si et seulement si
$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial u}(u,v) = 0,$$
soit si et seulement s'il existe $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,
$$\tilde{g}(u,v) = h(v),$$
soit encore
$$\tilde{f}(u,v) = \mathrm{e}^{u}h(v),$$
soit finalement, si et seulement si, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x}h(3x+y).$$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est
$$\mathcal{S}_3 = \left\{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \longmapsto \mathrm{e}^{x}h(3x+y) \mid h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}.$$
-*Méthode 2 :* Soit $v_0 \in \mathbb{R}$. Considérons l'application $\tilde{f}_1 : u \longmapsto \tilde{f}(u,v_0)$. Alors $\tilde{f}_1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\tilde{f}_1'(u) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v_0) = \tilde{f}(u,v_0) = \tilde{f}_1(u)$. Donc $\tilde{f}_1$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ Il existe donc $h(v_0) \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}_1(u) = h(v_0)\mathrm{e}^{u}$. Il existe donc une application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(u,v) = h(v)\mathrm{e}^{u}$. Comme $h(v) = \tilde{f}(0,v)$, h est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Réciproquement, pour tout $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'application $(u,v) \longmapsto h(v)\mathrm{e}^{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie l'équation $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) = \tilde{f}(u,v)$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est
$$\mathcal{S}_3 = \left\{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \longmapsto \mathrm{e}^{x}h(3x+y) \mid h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}.$$

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation
$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$
On pourra effectuer le changement de variables $\begin{cases} u = \dfrac{1}{6}x^2 + y \\ v = x \end{cases}$.

On effectue donc le changement de variables
$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{6}x^2 + y \\ v = x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = v \\ y = u - \dfrac{1}{6}v^2 \end{cases}.$$
Considérons alors l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ;\ (u,v) \longmapsto (v, u - \frac{1}{6}v^2)$, bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ et de bijection réciproque $\varphi^{-1} : (x,y) \longmapsto \left(\frac{1}{6}x^2 + y, x\right)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On note $\tilde{f}$ l'application définie pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par $\tilde{f}(u,v) = f(v, u - \frac{1}{6}v^2)$. Alors $\tilde{f} = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, u - \frac{1}{6}v^2) - \frac{1}{3}v\frac{\partial f}{\partial y}(v, u - \frac{1}{6}v^2) \\ &= \frac{1}{3}\left(3\frac{\partial f}{\partial x}(v, u - \frac{1}{6}v^2) - v\frac{\partial f}{\partial y}(v, u - \frac{1}{6}v^2)\right)\end{aligned}$$
Par surjectivité de φ, on en déduit que f est solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation si et seulement si, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) = 0,$$
soit encore, si et seulement s'il existe une application $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,
$$\tilde{f}(u,v) = h(u),$$

soit finalement, puisque $\tilde{f} = f \circ \varphi$ et $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$, si et seulement si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = h\left(\frac{1}{6}x^2 + y\right).$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S}_1 = \left\{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x, y) \longmapsto h\left(\frac{1}{6}x^2 + y\right) \mid h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right\}.$$

Exercice 3. Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. Justifier que l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow U\ ;\ (r, \theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

   est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur U. On donnera la bijection réciproque.

2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur U de l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

3. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur U de l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 + y^2)f(x, y).$$

---

1. φ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur U de bijection réciproque

$$\varphi^{-1} : U \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ ;\ (x, y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

   φ est de classe $\mathcal{C}^1$ car ses composantes le sont.

   La jacobienne de φ est égale à r en tout point de $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc ne s'annule pas.

   Donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On note $\tilde{f}$ l'application définie, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, par $\tilde{f}(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
   Alors $\tilde{f} = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
   Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= \frac{1}{r}\left(r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right)\end{aligned}$$

   Par surjectivité de φ, on en déduit que f est solution de l'équation sur U si et seulement si pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = 0,$$

   soit encore, comme $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ est un produit d'intervalles, si et seulement s'il existe une application $h \in \mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$ telle que, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tilde{f}(r, \theta) = h(\theta),$$

   soit finalement, puisque $\tilde{f} = f \circ \varphi$ et $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$, si et seulement si pour tout $(x, y) \in U$,

$$f(x, y) = h\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

   Donc l'ensemble des solutions sur U est

$$\mathcal{S}_U = \left\{U \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x, y) \longmapsto h\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \mid h \in \mathcal{C}^1(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \mathbb{R})\right\}.$$

3. En reprenant les notations de la question précédente, f est solution de l'équation si et seulement si $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = r\tilde{f}(r,\theta)$.

-*Méthode 1 :* Posons $\tilde{g}(r,\theta) = \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\tilde{f}(r,\theta)$.
Alors $\tilde{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r,\theta) = \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) - \tilde{r}f(r,\theta)\right).$$
Donc f est solution si et seulement si
$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r,\theta) = 0,$$
soit si et seulement s'il existe $h \in \mathcal{C}^1(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\mathbb{R})$ tel que
$$\tilde{g}(r,\theta) = h(\theta),$$
soit
$$\tilde{f}(r,\theta) = \mathrm{e}^{\frac{r^2}{2}}\tilde{h}(\theta),$$
soit finalement si et seulement si, pour tout $(x,y) \in U$,
$$f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}h(\arctan(\frac{y}{x}).$$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est
$$\mathcal{S}_2 = \left\{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{2}}h\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \longmapsto \mid h \in \mathcal{C}^1\left(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\mathbb{R}\right)\right\}.$$
-*Méthode 2 :* Comme celle de la question 3. de l'exercice 1.

Exercice 4. On considère l'équation
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{1}$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Soient a, b, c et d des réels. Exprimer $D_{(a,b)}(D_{(c,d)}f)$ en fonction de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
2. En déduire que si f est solution de l'équation (1) alors
$$D_{(1,-1)}(D_{(1,-1)}f) = 0.$$
3. Déterminer alors l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation (1) à l'aide d'un changement de variables adapté.

---

1. On a $D_{(c,d)}f = c\dfrac{\partial f}{\partial x} + d\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Puis, par le théorème de Schwarz, on obtient
$$D_{(a,b)}(D_{(c,d)}f) = ac\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (bc+ad)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + bd\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$
2. En prenant $a = c = 1$ et $b = d = -1$, on a $ac = 1$, $bc + ad = -2$ et $bd = 1$.
Donc si f est solution de l'équation alors $D_{(1,-1)}(D_{(1,-1)}f) = 0$.
3. Introduisons alors les vecteurs $e'_1 = (1,-1)$ et $e'_2 = (0,1)$ de sorte que la famille (e'_1, e'_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$. On a $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *On dérivera donc deux fois par rapport au premier vecteur de la nouvelle base.*
On va donc effectuer le changement de variables
$$\begin{cases} x = u \\ y = -u+v \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u = x \\ v = x+y \end{cases}.$$
L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ;\ (u,v) \longmapsto (u,-u+v)$ bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^2$ et de bijection réciproque $\varphi^{-1} : (x,y) \longmapsto (x, x+y)$.
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. On note $\tilde{f}$ l'application définie, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, par $\tilde{f}(u,v) = f(u,-u+v)$. $\tilde{f} = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,-u+v) - \frac{\partial f}{\partial y}(u,-u+v)$$

et

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,-u+v) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u,-u+v)$$
$$- \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,-u+v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,-u+v).$$

Donc f étant $\mathcal{C}^2$, par le théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,-u+v) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u,-u+v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,-u+v).$$

Par surjectivité de φ, on en déduit que f est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u^2}(u,v) = 0,$$

soit si et seulement s'il existe deux applications h_1 et h_2 éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\tilde{f}(u,v) = uh_1(v) + h_2(v),$$

soit finalement, puisque $\tilde{f} = f \circ \varphi$ et $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$, si et seulement si, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = xh_1\left(x+y\right) + h_2\left(x+y\right).$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \longmapsto xh_1\left(x+y\right) + h_2\left(x+y\right) \mid (h_1,h_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})^2 \right\}.$$