Feuille de TD n° 14

Révisions

27 décembre 2020

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle
$$y''+4y=\tan(t).$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle
$$(1-x^2)y'-xy=2. \tag{E}$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation (E).
2. Résoudre l'équation (E) sur $]-1,1[$.
3. (*Facultatif*) En déduire le développement en série entière de $(\arcsin(x))^2$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle
$$Y'=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-4&3&-4\\-2&1&-2\end{pmatrix}Y+\begin{pmatrix}1\\4t+1\\2t+1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle
$$y'=\exp(t+y).$$

Exercice 5. On considère le problème de Cauchy
$$\begin{cases}y'=x^2+y^2\\y(0)=0\end{cases}.$$

1. Justifier qu'il existe une unique solution maximale φ_m à ce problème de Cauchy, définie sur un intervalle ouvert I_m contenant 0.
2. Montrer que φ_m est une fonction impaire.
3. Montrer que φ_m est strictement croissante.
4. Justifier que pour tout $x\in]0,+\infty[\cap I_m$, $\varphi_m(x)\neq 0$ et $\dfrac{\varphi_m'(x)}{\varphi_m(x)^2}\geq 1$.
5. En déduire que I_m est un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
6. Déterminer l'image de I_m par φ_m.