Corrigé du TD n° 14

Révisions

30 décembre 2020

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle

$$y'' + 4y = \tan(t).$$

- *Identification :* Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
- *Solutions de l'équation homogène :* Le polynôme caractéristique est $X^2+4=(X+2i)(X-2i)$.
  L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $y''+4y=0$ est donc
  $$\mathcal{S}_h = \left\{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1\cos(2t)+\lambda_2\sin(2t) \mid (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$
- *Solution particulière de l'équation :* Appliquons la méthode de variations des constantes. Posons, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi_1(t)=\cos(2t)$ et $\varphi_2(t)=\sin(2t)$. D'après le point précédent, la famille (φ_1,φ_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène (puisqu'elle engendre l'espace vectoriel des solutions qui est de dimension 2).
  On cherche une solution particulière φ_p sous la forme $\varphi_p(t)=\psi_1(t)\varphi_1(t)+\psi_2(t)\varphi_2(t)$ où ψ_1 et ψ_2 sont des applications dérivables de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $\varphi_p'(t)=\psi_1(t)\varphi_1'(t)+\psi_2(t)\varphi_2'(t)$.
  Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,
  $$\begin{cases}\psi_1'(t)\varphi_1(t)+\psi_2'(t)\varphi_2(t)=0\\ \psi_1'(t)\varphi_1'(t)+\psi_2'(t)\varphi_2'(t)=\tan(t)\end{cases},$$
  soit encore si et seulement si, pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,
  $$\begin{cases}\psi_1'(t)\cos(2t)+\psi_2'(t)\sin(2t)=0\\ -2\psi_1'(t)\sin(2t)+2\psi_2'(t)\cos(2t)=\tan(t)\end{cases}.$$
  Donc φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,
  $$\begin{cases}\psi_1'(t)=-\dfrac{1}{2}\tan(t)\sin(2t)\\ \psi_2'(t)=\dfrac{1}{2}\tan(t)\cos(2t)\end{cases}.$$
  Comme $\tan(t)=\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$, $\cos(2t)=2\cos^2(t)-1$ et $\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$, φ_p est solution si et seulement si, pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,
  $$\begin{cases}\psi_1'(t)=-\sin^2(t)=-\dfrac{1}{2}(1-\cos(2t))\\ \psi_2'(t)=\sin(t)\cos(t)-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}=\dfrac{1}{2}\sin(2t)-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}\end{cases}.$$
  Choisissons par exemple, pour ψ_1 et ψ_2 les fonctions définies pour tout $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par
  $$\begin{cases}\psi_1(t)=-\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{1}{2}\sin(2t)),\\ \psi_2(t)=-\dfrac{1}{4}\cos(2t)+\dfrac{1}{2}\ln(\cos(t))\end{cases}.$$
  La fonction $\varphi_p : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto(-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin(2t))\cos(2t)+(-\frac{1}{4}\cos(2t)+\frac{1}{2}\ln(\cos(t)))\sin(2t)$ est alors une solution particulière de l'équation.

– Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t) + (-\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t))\cos(2t) + (-\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{2}\ln(\cos(t)))\sin(2t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - xy = 2. \tag{E}$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation (E).
2. Résoudre l'équation (E) sur $]-1,1[$.
3. (*Facultatif*) En déduire le développement en série entière de $(\arcsin(x))^2$.

---

1. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
   La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et pour tout $t \in]-R,R[$, par dérivation terme à terme de la somme d'une série entière, on a

$$\begin{aligned}
(1-x^2)f'(x) - xf(x) &= (1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) a_{m+1} x^m - \sum_{m=2}^{+\infty} (m-1) a_{m-1} x^m - \sum_{m=1}^{+\infty} a_{m-1} x^m \\
&= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\
&= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}\big) x^n
\end{aligned}$$

Ainsi, f est solution de l'équation sur $]-R,R[$ si et seulement si pour tout $x \in]-R,R[$,

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}\big) x^n - 2 = 0,$$

soit, par unicité du développement en série entière de l'application nulle, si et seulement si $a_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} = 0. \tag{$*$}$$

La relation $(*)$ est vérifiée si et seulement si $a_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (2n+1)a_{2n+1} & = & 2n a_{2n-1} \\ 2n a_{2n} & = & (2n-1)a_{2n-2} \end{array} \right.$$

soit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{2n+1} = \dfrac{2n \cdots 2}{(2n+1)\cdots 3} 2 = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} 2 \\ a_{2n} = \dfrac{(2n-1)\cdots 1}{2n \cdots 2} a_0 = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} a_0 \end{array} \right.$$

La série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ a pour rayon de convergence $R = 1$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}^*$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} \neq 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}| = |x|^2$. Donc d'après le critère de d'Alembert, si $|x| < 1$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge donc $R \geq 1$, et si $|x| > 1$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge donc $R \leq 1$. Donc $R = 1$. On note g la somme de cette série entière.

On montre de même que la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$ a pour rayon de convergence $R = 1$. On note h sa somme.

L'ensemble des solutions est donc

$$S_h = \{]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto 2g(x) + a h(x), \ a \in \mathbb{R}\}.$$

2. Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{1-x^2}$ est

$$x \longmapsto -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $]-1;1[$ est

$$S_h = \{]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière φ_p sous la forme $\varphi_p(x) = \psi(x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $\psi :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si

$$(1-x^2)\psi'(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2,$$

soit encore si et seulement si

$$\psi'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Choisissons par exemple $\psi(x) = 2\arcsin(x)$.
Donc $\varphi_p(x) = \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est une solution particulière de l'équation.
L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \{]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3. D'après les questions précédentes, on peut montrer que $g(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc par intégration,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

soit encore

$$\arcsin(x)^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^{2m-1}(m-1)!^2}{(2m)!} x^{2m}.$$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$Y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 4t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix}.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On a $\chi_A = X(X-1)(X+1)$, donc A admet trois valeurs propres distinctes -1, 0 et 1. Des vecteurs propres respectifs associés sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit on donne alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène puis on applique la méthode de variations des constantes, soit on diagonalise la matrice A.

Diagonalisons la matrice A. On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1(R, \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Alors Φ est solution de l'équation si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi'(t) = PDP^{-1}\Phi(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 4t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix},$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P^{-1}\Phi'(t) = DP^{-1}\Phi(t) + P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 4t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix},$$

soit finalement si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P^{-1}\Phi$ est solution de l'équation

$$Y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 3 \\ -2t+2 \\ 2t-1 \end{pmatrix},$$

après calcul de $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 4t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc Φ est solution de l'équation si et seulement si $P^{-1}\Phi$ est solution du système différentiel

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 3 \\ y_2' = -2t + 2 \\ y_3' = y_3 + 2t - 1 \end{cases}.$$

En résolvant séparément chacune des équations (on peut chercher les solutions particulières sous la forme polynôme exponentielle), on obtient que l'ensemble des solutions de ce système est l'ensemble des fonctions de la forme

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{-t} + 3 \\ \psi_2(t) = \lambda_2 - t^2 + 2t \\ \psi_3(t) = \lambda_3 \mathrm{e}^{t} - 2t - 1 \end{cases},$$

où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P^{-1}\Phi(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{e}^{-t} + 3 \\ \lambda_2 - t^2 + 2t \\ \lambda_3 \mathrm{e}^{t} - 2t - 1 \end{pmatrix}$, et donc

$$\Phi(t) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{e}^{-t} + 3 \\ \lambda_2 - t^2 + 2t \\ \lambda_3 \mathrm{e}^{t} - 2t - 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^2 - 1 \\ -4t + 1 \\ t^2 - 2t + 3 \end{pmatrix}.$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^2 - 1 \\ -4t + 1 \\ t^2 - 2t + 3 \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle

$$y' = \exp(t + y).$$

— *Identification :* Il s'agit d'une équation différentielle scalaire non linéaire du premier ordre de la forme $y' = f(t, y)$ avec $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (t, y) \longmapsto \exp(t + y)$.
Remarquons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire, tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.

— *Résolution par séparation des variables :* Soit φ une application d'une intervalle I de $\mathbb{R}$ dérivable.
Alors φ est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = \exp(t)\exp(\varphi(t)),$$

soit encore, si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t)\exp(-\varphi(t)) = \exp(t).$$

Par intégration, φ est donc solution sur I si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$,

$$-\exp(-\varphi(t)) = \exp(t) + \lambda,$$

soit

$$\exp(-\varphi(t)) = -\exp(t) - \lambda.$$

Comme pour tout $t \in I$, $\exp(-\varphi(t)) > 0$, on en déduit que φ est solution si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$-\mathrm{e}^{t} - \lambda > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = -\ln(-\mathrm{e}^{t} - \lambda).$$

— *Recherche des solutions maximales :*
• 1^{er} **cas :** $\lambda \geq 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-\mathrm{e}^{t} - \lambda < 0$.
• 2^{nd} **cas :** $\lambda < 0$. Alors $-\mathrm{e}^{t} - \lambda > 0$ si et seulement si $t < \ln(-\lambda)$.
Posons alors $\varphi_\lambda :]-\infty, \ln(-\lambda)[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\ln(-\mathrm{e}^{-t} - \lambda)$, solution maximale car elle tend vers $+\infty$ en $\ln(-\lambda)$.
Ainsi, l'ensemble des solutions maximales est $\{\varphi_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}_-^*\}$.

Exercice 5. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

1. Justifier qu'il existe une unique solution maximale φ_m à ce problème de Cauchy, définie sur un intervalle ouvert I_m contenant 0.
2. Montrer que φ_m est une fonction impaire.
3. Montrer que φ_m est strictement croissante.
4. Justifier que pour tout $x \in]0, +\infty[\cap I_m$, $\varphi_m(x) \neq 0$ et $\dfrac{\varphi_m'(x)}{\varphi_m(x)^2} \geq 1$.
5. En déduire que I_m est un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
6. Déterminer l'image de I_m par φ_m.

---

1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème de Cauchy admet donc une unique solution φ_m définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contenant 0.
2. Posons, pour tout $x \in]-b, -a[$, $\psi(x) = -\varphi(-x)$. Alors ψ est bien définie, dérivable car φ l'est, et pour tout $x \in]-b, -a[$
$$\psi'(x) = \varphi'(-x) = (-x)^2 + \varphi(-x)^2 = x^2 + (-\psi(x))^2 = x^2 + \psi(x)^2.$$
De plus, $\psi(0) = -\varphi(-0) = 0$. Donc ψ est solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
Or φ_m est LA solution maximale de ce problème de Cauchy, donc ψ est une restriction de φ_m et $]-b, -a[\subset]a, b[$. On en déduit donc que $a = -b$ et $\varphi = \psi$ sur l'intervalle $]-b, b[$.
Donc φ est impaire et $I =]-b, b[$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi_m'(x) = x^2 + \varphi(x)^2 \geq x^2 > 0$ donc φ_m est strictement croissante sur I. (*une fonction dont la dérivée est strictement positive sauf en un nombre fini de points est strictement croissante.)*
4. Comme $\varphi_m(0) = 0$ et φ_m est strictement croissante, pour tout $x \in]0, b[=]0, +\infty[\cap I_m$, $\varphi_m(x) > 0$.
On a donc
$$\frac{\varphi_m'(x)}{\varphi_m(x)^2} = \frac{x^2}{\varphi_m(x)^2} + 1 \geq 1.$$
Soit $x_0 \in]0, b[$. Alors, en intégrant, pour tout $x \in]x_0, b[$,
$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_m'(t)}{\varphi_m(t)^2} \mathrm{d}t \geq x - x_0,$$
soit
$$-\frac{1}{\varphi_m(x)} + \frac{1}{\varphi_m(x_0)} \geq x - x_0.$$
Donc, pour tout $x \in]x_0, b[$, $x \leq x_0 + \dfrac{1}{\varphi_m(x_0)}$.
Donc en laissant tendre x vers b, $b \leq x_0 + \dfrac{1}{\varphi_m(x_0)} < +\infty$.
Donc $I =]-b, b[$ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
5. φ_m étant strictement croissante, on a $\mathrm{Im}(\varphi_m) = \varphi_m(]-b, b[) =]\lim\limits_{x \to -b} \varphi_m(x), \lim\limits_{x \to b} \varphi_m(x)[$.
Posons $\ell = \lim\limits_{x \to b} \varphi_m(x)$. φ_m étant strictement croissante, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Comme $b < +\infty$, d'après le théorème des bouts, on en déduit que φ_m n'admet pas de limite finie en b, puisque sinon, on aurait $(b, \ell) \in \mathbb{R}^2$ et φ_m ne serait pas maximale. Donc φ_m tend vers $+\infty$ en b.
La fonction φ_m étant impaire, φ_m tend vers $-\infty$ en $-b$.
Donc l'image de I_m par φ est $\mathbb{R}$.