Ex1 :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad J^h = \begin{array}{c} \quad\quad\quad h+1 \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

et $J^n = 0$. la matrice est nilpotente d'indice n : $J^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

$P = a_0 + a_1 X + \quad\quad + a_d X^d$.

$P(J) = a_0 I + a_1 J + \quad\quad + a_d J^d = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & a_1 \\ & & & a_0 \end{pmatrix}$

$d \geq n$.

$P(aI_n + J)$

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \quad + \frac{P^{(d)}(a)(X-a)^d}{d!},$$

$$P(aI_n + J) = P(a)I_n + P'(a)J + \quad + \frac{P^{(d)}(a)}{d!} J^d,$$

$d \geq n$

$$P(aI_n + J) = \begin{pmatrix} P(a) & P'(a) & \cdots & \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & P'(a) \\ 0 & & & P(a) \end{pmatrix}.$$

Ex2 $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

$P(A) = 0$
$Q(B) = 0$.

$M^h = \begin{pmatrix} A^h & * \\ 0 & B^h \end{pmatrix}$

$R = r_0 + \dots + r_d x^d$

$$R(M) = \sum_{i=0}^{d} r_i M^i = \sum_{i=0}^{d} r_i \begin{pmatrix} A^i & * \\ 0 & B^i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{d} r_i A^i & * \\ 0 & \sum_{i=0}^{d} B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(A) & * \\ 0 & R(B) \end{pmatrix}$$

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$$

$$Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & * \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(A) & * \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix}$$

$$(PQ)(M) = \begin{pmatrix} P(A)Q(A) & * \\ 0 & P(A)Q(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(A) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

PQ annule $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = (1) \quad C = (1),$ $\quad P = X - 1$

$B = (1)$ $\quad Q = X - 1$

$$PQ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Ex3 : $P = a_0 + a_1 X + \quad + a_d X^d$. $P(0) = 1$

$a_0 = 1$ $\quad AB = P(A) = I_n + a_1 A + \quad + a_d X^d$

$$A\left(B - \left(a_1 I_n + a_2 A + \quad + a_d A^{d-1}\right)\right) = I_n$$

$\Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \left(B - \left(a_1 I_n + \quad + a_d A^{d-1}\right)\right)$

A et A^{-1} commutent $\Rightarrow AB = BA$

$AA^{-1} = A^{-1}A$

2) A nilpotente d'indice d : $A^{d-1} \neq 0$ $A^d = 0$.

$(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ est une famille libre ?

Soit $\alpha_0 \dots \alpha_{d-1}$ tels que

$$\alpha_0 I_n + \quad + \alpha_{d-1} A^{d-1} = 0.$$

On suppose que $\alpha_0 = \quad = \alpha_{m-1} = 0$ et $\alpha_m \neq 0$.

$A^{d-m-1} \times$

$$\alpha_m A^m + \alpha_{m+1} A^{m+1} + \quad + \alpha_{d-1} A^{d-1} = 0$$

$$\underbrace{\alpha_m A^{d-1}}_{\neq 0} + \underbrace{\cancel{\alpha_{m+1} A^d}}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow \alpha_m = 0$ car $A^{d-1} \neq 0$. absurde.

Donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \quad = \alpha_{d-1} = 0.$

$B = A\,P(A)$ $\quad l \geq d$;

$P = a_0 + a_1 X + \quad + a_l X^l$; $\quad A^d = 0$

$P(A) = a_0 + a_1 X + \quad + a_{d-1} A^{d-1}$ $\quad$ car $l \geq d$ $\quad A^d = 0$

Donc on suppose $P = a_0 + a_1 X + \quad + a_{d-1} X^{d-1}$;

$P(0) = 1$; $\quad P = 1 + a_1 X + \quad + a_{d-1} X^{d-1}$

$B = A\,P(A) = A + a_1 A + \quad + a_{d-2} A^{d-1}$

$B = \in \mathrm{vect}(A, \ldots, A^{d-1})$

$B^{d-1} = A^{d-1} + 0 \neq 0$; $\quad B$ est nilpotente d'indice d.

$B^d = 0$

$\mathrm{vect}(B_1, \ldots, B^{d-1}) = \mathrm{vect}(A_1, \ldots, A^{d-1})$

car $B^k \in \mathrm{vect}(A_1, \ldots, A^{d-1})$

et $(B_1, \ldots, B^{d-1})$ libre

$\mathrm{vect}(B_1 \ldots B^{d-1}) \subset \mathrm{vect}(A_1, \ldots, A^{d-1})$

et dim — = dim —

donc ils sont égaux

$$M \quad \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc|l} B & B^2 & \cdots & B^{d-1} & \\ \end{array}$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B & B^2 & \cdots & B^{d-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ a_1 & 1 & & \vdots \\ & * & & \\ & & & 0 \\ a_{d-1} & * & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A \\ A^2 \\ \\ \\ A^{d-1} \end{array} \Rightarrow M^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & \cdots & A^{d-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \\ b_{d-1} & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} B \\ \\ B^{d-1} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad A = B + b_1 B^2 + \qquad + b_{d-2} B^{d-1}$$

$$= B \left(I_n + b_1 B + \qquad + b_{d-2} B^{d-2} \right)$$

$$\left. Q = 1 + b_1 X + \qquad + b_{d-2} X^{d-2} \right|$$

$$A = B\, Q(B) .$$

Ex4 $A \in GL_n(\mathbb{C})$ B $B^p = 0$ $B^{p-1} \neq 0$

$I - B \in GL_n(\mathbb{C})$?

$$\cos B = I_n - \frac{B^2}{2!} + \frac{B^4}{4!} - \dots \frac{B^{2[\frac{p}{2}]}}{(2[\frac{p}{2}])!}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

$$(I - B)^{-1} = I_n + B + B^2 + \dots + B^{d-1}$$

$$(I - B)(I_n + B + \dots + B^{d-1}) = I - B^d = I_n$$

2) $I + A^{-1} B A$ ou $I - \underbrace{(-A^{-1} B A)}_{N}$

$N^k = (-1)^k A^{-1} B^k A$ si $k \geq d \Rightarrow N^k = 0$

$I + A^{-1}BA$ est inversible.

$$(I + A^{-1}BA)^{-1} = I_n - A^{-1}BA + A^{-1}B^2A + \dots + (-1)^{d-1}A^{-1}B^{d-1}A$$

3) $H = \{ I_n + P(B) \ , \ P, \ P(0) = 0 \}$

$(P(B))^d = 0$ car $P = a_1 X + \dots + a_{d-1} X^{d-1}$

$\Rightarrow I_n + P(B) \in GL_n(\mathbb{K})$

$$(I_n + P(B))^{-1} = I_n + P(B) + \dots + (P(B))^{d-1}.$$

$$= I_n + Q(B)$$

$Q = P + P^2 + \dots + P^{d-1}$.

$(I_n + P(B))^{-1} \in H$ $\quad$ $I_n \in H$.

$H \subset GL_n(\mathbb{C})$. $\quad$ $H \neq \emptyset$ $\quad$ $A \in H$ $\quad$ $A^{-1} \in H$.

$A, B \in H$ $\quad$ $AB \in H$.

<u>Ex 5</u> : $x_0 \in E$ $\quad$ $u \in \mathcal{L}(E)$

$(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre.

Si $v \in \mathcal{L}(E)$ $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(u) = v$

$C(u)$ commutant de u

$C(u) = \mathbb{K}[u]$

On a toujours $\mathbb{K}[u] \subset C(u)$

$u^k \circ u = u^{k+1} = u \circ u^k$

$(id, u \dots u^k, \dots)$ famille génératrice de $\mathbb{K}[u]$.

$u \circ (\alpha_0 id + \alpha_1 u + \quad + \alpha_d u^d) =$

$(\alpha_0 id + \quad + \alpha_d u^d) \circ u$.

Si $v \circ u = u \circ v$ On cherche

$P = a_0 + \quad + a_{n-1} X^{n-1}$ tq $v = P(u)$

$\forall x \in E$ $\quad v(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \quad + a_{n-1} u^{n-1}(x)$

$v(x_0) = a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \quad + a_{n-1} u^{n-1}(x_0)$

Or $(x_0, \dots u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

alors $(a_0, \dots, a_{n-1})$ sont les coordonnées de $v(x_0)$ dans la base $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$

Synthèse : On veut vérifier que

si $v(x_0) = a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \quad + a_{n-1} u^{n-1}(x_0)$

alors on pose $P = a_0 + \quad + a_{n-1} X^{n-1}$

et on veut montrer que $w = P(u)$ est égal à v :

On montre que v et w coïncident sur la base $(x_0, \quad , v^{n-1}(x_0))$

Soit $v^h(x_0)$.

$$v(u^h(x_0)) = u^h \circ v(x_0) = u^h(a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \quad + a_{n-1} u^{n-1}(x_0))$$

$$= a_0 u^h(x_0) + \quad + a_{n-1} u^{n+h-1}(x_0)$$

$$w(u^h(x_0)) = P(u)(u^h(x_0))$$

$$= (a_0 I_n + \quad + a_{n-1} u^{n-1}) \circ u^h(x_0)$$

$$= a_0 u^h + \quad + a_{n-1} u^{h+n-1}(x_0)$$

$$v(u^h(x_0)) = w(u^h(x_0)) \Rightarrow \underline{v = w = P(u)}$$

Dac $C(U) = \mathbb{K}[u] -$