

$$\underline{\text{Ex 1}} \quad f^3 + 2f^2 - f - 2\text{id}_E = 0.$$

$$P(f) = 0 \quad P(0) \neq 0.$$

$$f(f^2 + 2f - \text{id}_E) = 2\text{id}_E.$$

$$f^{-1} \text{ existe et vaut } \frac{1}{2}(f^2 + 2f - \text{id}_E).$$

$$\underline{\text{Ex 2}} \quad v \in \mathcal{L}(E) \quad P(v) \in GL(E)$$

$$P \in K[x]$$

M_n le polynomial minimal de u .

$$M_n = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0.$$

$$M_u(u) = 0.$$

Supposons $P = R_1 S$ $S \nmid P$ et $S \nmid M_u$
 $M_u = R_2 S$

$P(u) = R_1(u) S(u)$ Mais $P(u) \in GL_n(E)$

$\Rightarrow S(u)$ est inversible.

$M_u(u) = R(u) S(u) = 0$
 $\times \tilde{S}'(u) \Rightarrow \underline{R}(u) = 0 \Rightarrow \deg R = \deg M_u$

$\deg(S) = 0 \Rightarrow S$ est cste

donc M_u et P sont premiers entre eux.

Ex 3

M

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= aI_n + bJ$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_n J = J I_n$$

$$J^2 = I_n$$

$$M^2 = (aI_n + bJ)^2$$

$$= a^2 I_n + b^2 I_n + 2abJ$$

$$= 2a(bJ + aI_n)$$

$$+ (a^2 + b^2 - 2a^2) I_n$$

$$M^2 = 2aM + (b-a)^2 I_n$$

$$p = x^2 - 2ax + (b-a)^2.$$

Ex 4. $m \in \mathcal{L}(E)$. $F \oplus G = E$

Ex 4. $n \in \mathbb{Z}(E)$.
 Dans une base adaptée la matrice α de α_n s'écrit : $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha$

$$\text{Mat}_B(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = M$$

M_{UF} part. aussi min de U_F , donc de A
 U_C donc de B'

M_{MG}

$S_n: P \in K[X] \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$

$$S_n: p \in K[x]$$

$$P(M)=0 \text{ sur } P(A)=0 \text{ et } P(B)=0,$$

$$M_M(M)=0 \Rightarrow M_U(A) \text{ et } M_U(B)=0,$$

$$\Rightarrow M_{U_F}|M_U \text{ et } M_{U_G}|M_U,$$

$$\Rightarrow P_P(M(M_{U_F}, M_{U_G})|M_U,$$

$$\text{et sur } P = P_P(M(M_{U_F}, M_{U_G}) \text{ alors})$$

$$P(A)=0 \text{ et } P(B)=0 \Rightarrow P(M)=0$$

$$\text{donc } P|M_U \Rightarrow \text{Si } P \text{ est unitaire}$$

$$P \leq M_U.$$

$$2) \quad \ker u(u - \text{id}) \oplus \ker u(u + \text{id}) = E.$$

Théorème des noyaux :

$$\text{Si } P \wedge Q = 1 \quad \ker P(u) \circ Q(u) \\ = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

$$\ker u(u - \text{id}) = \ker u \oplus \ker(u - \text{id})$$

$$\ker u(u + \text{id}) = \ker u \oplus \ker(u + \text{id})$$

$$\Rightarrow \ker u \subseteq \ker u(u - \text{id}) \cap \ker u(u + \text{id}) = \{0\}$$

$$\Rightarrow \ker u = \{0\}.$$

$$\hookrightarrow \text{Ker}(v - \text{id}) \oplus \text{Ker}(v + \text{id}) = E$$

$$E_1(u) \oplus E_2(v) = E$$

$\Rightarrow u$ est diagonalisable et

$$\text{Mat}_B u = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

$u^2 = \text{id} \Rightarrow S$ est une symétrie

Ex 4 $f^3 - 3af^2 + a^2f = 0, \quad f \in \mathcal{L}(E), \text{ sur } E$
quelconque

$E = \ker f(f^2 - 3af + a^2 \text{id}) = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } f^2 - 3af + a^2 \text{id}$

théorème des noyaux $\chi_A(X^2 - 3aX + a^2) = 1$

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker } f^2 - 3af + a^2 \text{id}$$

Montrons que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f^2 - 3af + a^2 \text{id}$

Si $f(x) \in \text{Im } f$

$$(f^2 - 3af + a^2 \text{id})(f(x)) = f^3(x) - 3af^2(x) + a^2 f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{f(x) \in \text{Ker } (f^2 - 3af + a^2 \text{id})}$$

$$\text{Im } f \subset \text{Ker } (f^2 - 3af + a^2 \text{id})$$

$$\text{Si } x \in \text{Ker}(f^2 - 3af + a^2 \text{id})$$

$$a^2 x - 3af(x) + f^2(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3af(x) - f^2(x)}{a^2}$$

$a \neq 0$

$$x = f\left(\frac{3a - f(x)}{a^2}\right) \in \text{Im } f$$

$$\text{Ker } f^2 - 3af + a^2 \text{id} \subset \text{Im } f$$

d'où l'égalité et $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$

$$2) \quad p(0) = 0 \quad p'(0) = 1.$$

$$p = x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_d x^d.$$

$$p(f) = 0, \quad \text{Ker } f(\text{id} + \alpha_2 f + \dots + \alpha_d f^{d-1}) = E.$$

$$\text{Ker } f \oplus \text{Ker } (\text{id} + \alpha_2 f + \dots + \alpha_d f^{d-1}) = E$$

De même, si $f(x) \in \text{Im } f$ on a :

$$\begin{pmatrix} \text{id} + \alpha_2 f + \dots + \alpha_d f^{d-1} \\ f + \alpha_1 f^2 + \dots + \alpha_d f^d \end{pmatrix} (x) = 0$$

$$\underline{f(x) \in \text{Ker } f.}$$

$$S_n \quad x \in \text{Ker } f$$

$$(id + d_1 f + \dots + d_{n-1} f^{d-1})(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = -d_1 f(x) - \dots - d_{n-1} f^{d-1}(x)$$

$$\Rightarrow x \in \text{Im } f$$

$$\text{Im } f = \text{Ker } (id + d_1 f + \dots + d_{n-1} f^{d-1})$$

$$\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$$

