

Ex 1 $f \in \mathcal{L}(E)$ $K_p = \ker f^p$ $p \in \mathbb{N}$
 $\dim E = n$ $I_p = \operatorname{Im} f^p$

1) $K_p \subset K_{p+1}$: $\forall x \in K_p$, $f^p(x) = 0 \Rightarrow f^{p+1}(x) = 0$
 $\Rightarrow$ $x \in K_{p+1}$

$I_p \supset I_{p+1}$: $\forall y \in I_{p+1}$, $\exists x$ tq $y = f^{p+1}(x)$
 $\Rightarrow y = f^p(f(x)) \Rightarrow y \in$ I_p

2) Soit $n_p = \dim K_p$ (n_p) est croissante
 et majorée par $n \Rightarrow (n_p)$ converge $\Rightarrow$
 (n_p) est stationnaire à partir d'un
 certain rang. $\exists p_0$ tq $\forall p > p_0$ $n_p = n_{p_0}$
 $\Rightarrow K_p = K_{p_0}$. En particulier $K_{p_0} = K_{p_0+1}$

De même, il existe p_1 tq $I_{p+1} = I_p$

puisque $m_p = \dim I_p$ m_p est
croissante et minorée par 0. Donc $\exists V$.

$A = \{p \in \mathbb{N}, K_p = K_{p+1} \} \neq \emptyset$ car $p_0 \in A$.

A est minorée par 0 $\Rightarrow A$ admet un
minimum : r : $K_r = K_{r+1}$

Rmq : $B = \{p \in \mathbb{N}, I_p = I_{p+1} \}$ $\min B = 1$ $I_1 = I_{1+1}$

3) $\dim K_r = \dim K_{r+1} \Leftrightarrow \dim I_r = \dim I_{r+1}$
par théorème du rang ($\dim$ fini).
Conclusion : $r = 1$

4) Si $K_n = K_{n+1}$, on a $K_{n+1} \subset K_{n+2}$

Soit $x \in K_{n+2}$ $\Rightarrow f^{n+2}(x) = 0$

$$\Rightarrow f^{n+1}(f(x)) = 0 \text{ hyp}$$

$$\Rightarrow f(x) \in K_{n+1} = K_n$$

$$\Rightarrow f^n(f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow f^{n+1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x \in K_{n+1}}$$

Donc $K_{n+2} \subset K_{n+1}$ et par double
inclusion on a $K_{n+2} = K_{n+1}$

Par récurrence : $\forall h \in \mathbb{N} \quad K_n = K_{n+h}$

Voilà
n dim E
d < q

Le théorème du rang nous dit que
 $I_r = I_{r+h}$ (dim finie)

$$\text{Si } I_r = I_{r+1}, \quad I_{r+2} \subset I_{r+1}$$

et si $y \in I_{r+1}$, alors $y = f^{r+1}(x)$ d'où
q'q.

$$y = f(f^r(x)) \quad \text{Mais } I_r = I_{r+1} \text{ d'où } f^r(x) \in I_{r+1}$$

donc il existe x' tq $f^r(x) = f(x')$

$$\Rightarrow y = f(f^r(x)) = f^{r+1}(x')$$

$$\Rightarrow y \in I_{r+2}$$

$$\text{d'où } I_{r+1} = I_{r+2}$$

Rmq: $f \in GL(E)$ $K_p = \{0\}$ $I_p = E$.

On suppose plutôt $f \notin GL(E)$.

Le cas le + utile: f nilpotent.

$$f \neq 0 \quad f^{p-1} \neq 0 \quad f^p = 0 \quad K_p = E \quad K_1 \subsetneq E$$

$$I_p = \{0\} \quad I_1 \subsetneq E$$

Autre preuve: $\tilde{f}: \text{Im } f^{p+1} \longrightarrow \text{Im } f^{p+1+1}$
 $x \longmapsto f(x)$ dim $E = n$

$\tilde{f}$ est toujours surjective: $I_{p+1} \subset I_p'$
 $\tilde{f}$ isomorphisme $(\Leftrightarrow)$ injective $\text{Ker } \tilde{f} = \{0\}$
 $\text{Ker } \tilde{f} = I_p \cap \text{Ker } f = \{0\}$

$$(\Leftrightarrow) \dim I_p = \dim I_{p+1}$$

$$I_p = I_{p+1}$$

$$5) E = K_n \oplus I_n.$$

Par théorème du rang, il reste à montrer que $K_n \oplus I_n$

$$\checkmark f: I_n \xrightarrow{\quad} I_{2n} \quad \text{bijectiv} \\ x \longmapsto f^n(x)$$

$$\Rightarrow \text{Ker } f^n \cap I_n = \text{Ker } f = \{0\},$$

Soit : On prend $x \in K_n \cap I_n$

$$f^n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \exists y \text{ tq } x = f^n(y)$$

$$\Rightarrow f^{2n}(y) = 0 \quad y \in K_{2n} = K_n$$

$$\Rightarrow f^n(y) = 0 \quad \text{or} \quad x = f^n(y) = 0,$$

En dimension infinie :

$$f: K[x] \longrightarrow K[x] \\ p \longmapsto p'$$

$$I_n = K[x] \\ K_n = K_{n-1}[x]$$

$$g: K[x] \longrightarrow K[x] \\ p \longmapsto xp$$

$$K_n = \{0\} \\ I_n = x^n K[x]$$

Ex 2 $E = \mathbb{R}[x]$ $T: E \longrightarrow E$
 $p \longmapsto T(p) = p(1-x)$

$$(1-x)p = p(1-x) = a_0 + a_1(1-x) + \dots + a_d(1-x)^d$$

1) $T^2(p) = p \wedge p(1-(1-x)) = p(x)$
 $\Rightarrow x^2 - 1$ polynôme annulateur de p

$$\text{Spec } P \subset \{1, -1\}.$$

$$T(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \in \text{Spec } P.$$

$$P = (X - \frac{1}{2})$$

$$T(-1) = -1$$

$$\mathbb{K}_2[X]$$

restriction à $\mathbb{K}_2[X]$.

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = X - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Spec } P = \{1, -1\}.$$

Ex 3 $M \in M_n(\mathbb{R})$ Eq P_M pol. minimal de M

$P_M = X^2 + 1$ $\text{Spec } M \subset \text{racine de } P = \emptyset$

M_n a pas de valeurs propres.

On χ_0 est de degré n . Si n est impair, alors χ_0 a une racine et donc

$$P_0 \neq x^2 + 1.$$

Une condition nécessaire est n pair.

Si $n=2$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ $A^2 = -I_2$

$n=2p$

$$B = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} \hline A & & \\ \hline & A & \\ \hline & & A \\ \hline & & & A \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} \text{ } p \text{ blocs. } B^2 = -I_n$$

Ex 4 $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $AM = MB$ $M \neq 0$.

1) On a : $A^h M = M B^h \quad \forall h \in \mathbb{N}$ par réc.

Donc $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$.

$P(A)M = M P(B)$.

2) χ_A le pol. caractéristique de A .

$\chi_A(A) = 0 \Rightarrow \underline{\chi_A(B) = 0}$.

Dans $\mathbb{C}$: $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{n_i}$ $\text{Spec } A = \{a_i\}$.

On suppose que $\text{Spec } A \cap \text{Spec } B = \emptyset$

$\Rightarrow B - a_i I_n$ est inversible. $a_i \in \text{Spec } B$

$$\Rightarrow \chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$$

— V'ou $M = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.
 $M \neq 0$.

$$\text{Donc } \text{Spec } A \cap \text{Spec } B \neq \emptyset.$$

$$\underline{\text{Ex 5}} \quad P, Q \in \mathbb{K}[X] \quad P \wedge Q = 1.$$

$$u \in \mathcal{L}(E) \quad P Q(u) = 0.$$

Théorème des noyaux :

$$\text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u) = E$$

On montre que $\text{Ker } Q(u) = \text{Im } P(u)$

$$P \perp Q = 1 \Rightarrow R \perp P + S \perp Q = 1$$

$$R, S \in \mathbb{K}[x]$$

$$R(v) \perp(v) + S(v) Q(v) = \text{id} \quad (*)$$

$$\text{Si } x \in \text{Ker } Q(v) \xrightarrow{(*)} R(v)(x) \perp(v)(x) = x$$

$$\Rightarrow x = \perp(v)(R(v)(x)) \Rightarrow x \in \text{Im } \perp(v)$$

$$\text{Si } x \in \text{Im } \perp(v), \quad Q(v) \perp(v) = 0,$$

$$x = \perp(v)(y)$$

$$\Rightarrow Q(v) \perp(v)(y) = Q(v)(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \text{Ker } Q(v)$$

$$\text{Im } \perp(v) = \text{Ker } (Q(v)) \Rightarrow \text{Ker } \perp(v) + \text{Im } \perp(v) = \mathbb{E}$$

