FEUILLE DE TD N° 8

Révisions

3 JANVIER 2021

Exercice 1. Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants si elles existent et préciser s'il s'agit de minimum ou maximum :

1. $A =]-\sqrt{2}, 2]$,
2. $B = \{\sin(x) \mid x \in]0, \pi[\}$,
3. $C = \left\{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \mid x \in]0, \pi]\right\}$.

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{18}x - 5 = \overline{0}$.
2. Soit p un nombre premier distinct de 3. Démontrer que 3 divise $p^2 + 26$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 12345^{2000} par 7.
4. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.
5. Démontrer que si a et b sont des entiers tels que $a^2 + b^2 \equiv 0 \bmod 4$ alors a et b sont pairs.
6. Soit a et b deux entiers non nuls premiers entre eux. Démontrer que a^2 et $b^2 - a^2$ sont premiers entre eux.
7. On dispose d'une pile de livres. Lorsqu'on les range par 10, il en reste 3. Lorsqu'on les range par 17, il en reste 2. Quel est le nombre minimum de livres ? Quels sont tous les nombres possibles ?

Exercice 3. Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun chiffre 1. (*Attention, on considère que le nombre* 0000010 = 10 *est un nombre à* 2 *chiffres*) Déterminer le nombre d'éléments de A puis des ensembles suivants :

1. A_1, ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents,
2. A_2, ensemble des nombres pairs de A,
3. A_3, ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Exercice 4. Soit E un ensemble contenant n éléments. Soient a et b deux éléments de E distincts. Soit $p \in \{0, \dots, n\}$.

1. Déterminer le nombre de parties de E à p éléments contenant a et b.
2. Déterminer le nombre de parties à p éléments contenant a mais pas b.
3. Déterminer le nombre de parties à p éléments contenant b mais pas a.
4. Déterminer le nombre de parties à p éléments ne contenant ni a, ni b.
5. En déduire la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$.

Exercice 5. Justifier les égalités suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ pour $n > 0$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{2^n}{n!}$,
4. $\binom{p}{m}\binom{p-m}{n-m} = \binom{n}{m}\binom{p}{n}$.
5. Soient m, k deux entiers naturels.
   (a) Justifier que $\binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1}$.
   (b) En déduire, pour tous entiers naturels $m, n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de
   $$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m}.$$
   (c) En déduire celle de $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{p=1}^{m} (k+p) \right)$.

Exercice 6. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} 5^{\mathrm{card}(X)}.$$