Corrigé du TD n$^{\text{o}}$ 8

Révisions

3 janvier 2021

Exercice 1. Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants si elles existent et préciser s'il s'agit de minimum ou maximum :

1. $A =]-\sqrt{2}, 2]$,
2. $B = \{\sin(x) \mid x \in]0, \pi[\}$,
3. $C = \left\{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \mid x \in]0, \pi]\right\}$.

---

1. A est bornée donc A admet une borne inférieure et une borne supérieure. On a immédiatement $\inf(A) = -\sqrt{2}$ et $\sup(A) = \max(A) = 2$ puisque $2 \in A$ et 2 majore A. Mais A n'admet pas de minimum car sinon on aurait $\min(A) = \inf(A) = -\sqrt{2} \in A$ mais $-\sqrt{2} \notin A$.
2. Pour tout $x \in]0, \pi[$, $0 < \sin(x) \leq 1$.
   - B est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée par 1. Donc B admet une borne supérieure et $\sup(B) \leq 1$. Comme $\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $1 \in A$ et $\sup(A) = \max(A) = 1$.
   - B est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par 0. Donc B admet une borne inférieure et $\inf(B) \geq 0$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in]0, \pi[$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est donc une suite à valeurs dans A et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sin(0) = 0$ par continuité de sin. Donc d'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf(B) = 0$.

   On aurait également pu utiliser la caractérisation de la borne inférieure avec les ε, avec $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$

   Mais B n'admet pas de minimum car sinon on aurait $\min(B) = \inf(B) = 0 \in B$ mais pour tout $x \in]0, \pi[$, $\sin(x) > 0$ donc $0 \notin B$.
3. - C est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée par 1 puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sin(y) \leq 1$, en particulier pour tout $x \in]0, \pi]$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Donc C admet une borne supérieure et $\sup(C) \leq 1$. Comme $\frac{2}{\pi} \in]0, \pi]$ et $\sin\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $1 \in C$ et $\sup(C) = \max(C) = 1$.
   - C est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par -1 puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(y)$, en particulier pour tout $x \in]0, \pi]$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc C admet une borne inférieure et $\inf(C) \geq -1$. Comme $\frac{2}{3\pi} \in]0, \pi]$ et $\sin\left(\frac{1}{\frac{2}{3\pi}}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, $-1 \in C$ et $\inf(C) = \min(C) = -1$.

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{18}x - \overline{5} = \overline{0}$.
2. Soit p un nombre premier distinct de 3. Démontrer que 3 divise $p^2 + 26$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 12345^{2000} par 7.
4. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.
5. Démontrer que si a et b sont des entiers tels que $a^2 + b^2 \equiv 0 \bmod 4$ alors a et b sont pairs.
6. Soit a et b deux entiers non nuls premiers entre eux. Démontrer que a^2 et $b^2 - a^2$ sont premiers entre eux.
7. On dispose d'une pile de livres. Lorsqu'on les range par 10, il en reste 3. Lorsqu'on les range par 17, il en reste 2. Quel est le nombre minimum de livres ? Quels sont tous les nombres possibles ?

1. Soit $x \in \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$. On a $\overline{18}x - \overline{5} = \overline{0}$ si et seulement si $\overline{18}x = \overline{5}$.
   Les entiers 18 et 25 étant premiers entre eux, $\overline{18}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$. Déterminons son inverse.
   Déterminons une relation de Bezout entre 18 et 25.
$$\begin{aligned} 25 &= 1 \times 25 + 0 \times 18 \\ 18 &= 0 \times 25 + 1 \times 18 \\ 7 &= 1 \times 25 - 1 \times 18 \\ 4 &= -2 \times 25 + 3 \times 18 \\ 3 &= 3 \times 25 - 4 \times 18 \\ 1 &= -5 \times 25 + 7 \times 18. \end{aligned}$$
   Donc l'inverse de $\overline{18}$ dans $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ est $\overline{18}^{-1} = \overline{7}$.
   On a donc $\overline{18}x = \overline{5}$ si et seulement si $x = \overline{7} \times \overline{5} = \overline{35} = \overline{10}$.
   L'équation $\overline{18}x - \overline{5} = \overline{0}$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$, $\overline{10}$.
2. On a $p^2 + 26 \equiv p^2 + 2 \bmod 3$.
   p étant un nombre premier distinct de 3, p n'est pas divisible par 3 donc p n'est pas congru à 0 modulo 3. Il est donc soit congru à 1 modulo 3, soit congru à 2 modulo 3.
   • 1^er^ cas : $p \equiv 1 \bmod 3$. Alors $p^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \bmod 3$, donc $p^2 + 26 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \bmod 3$.
   • 2^ème^ cas : $p \equiv 2 \bmod 3$. Alors $p^2 \equiv 4 \equiv 1 \bmod 3$, donc $p^2 + 26 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \bmod 3$.
   Dans tous les cas, $p^2 + 26 \equiv 0 \bmod 3$, donc 3 divise $p^2 + 26$.
3. En déterminant le reste de la division euclidienne de 12345 par 7, on obtient $12345 \equiv 4 \bmod 7$.
   Donc $12345^{2000} \equiv 4^{2000} \bmod 7$.
   On a $4^0 \equiv 1 \bmod 7$, $4^1 \equiv 4 \bmod 7$, $4^2 \equiv 2 \bmod 7$, $4^3 \equiv 1 \bmod 7$. Maintenant que l'on est retombé sur le 1, on connait les restes de 4^n par 7 selon que n est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3.
   On a $2000 = 3 \times 666 + 2$, donc $4^{2000} \equiv (4^3)^{666} \times 4^2 \equiv 1^{666} \times 2 \equiv 2 \bmod 7$. (*Ou bien,* $2000 \equiv 2 \bmod 3$ *donc* $4^{2000} \equiv 4^2 \equiv 2 \bmod 7$)
   Donc $12345^{2000} \equiv 2 \bmod 7$.
   Ainsi, le reste de la division euclidienne de 12345^{2000} par 7 est 2.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par division euclidienne de $a-1$ par b, il existe $r \in \{0, \dots, b-1\}$ tel que $a-1 = bq+r$. Ainsi, $a = bq+r+1$.
   On a donc $ab^n - 1 = (bq + r + 1)b^n - 1 = qb^{n+1} + b^n(r + 1) - 1$ (car $r \leq b - 1$).
   Or $0 \leq b^n(r + 1) - 1 \leq b^n \times b - 1 = b^{n+1} - 1 < b^{n+1}$.
   Par définition de la division euclidienne, on en déduit que q est le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} et $b^n(r + 1) - 1$ est le reste.
5. Soient a et b des entiers tels que $a^2 + b^2 \equiv 0 \bmod 4$. Supposons par l'absurde que a et b ne sont pas tous les deux pairs.
   • 1^er^ cas : a et b sont impairs. Alors il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$. Alors $a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 4(k^2 + k'^2 + k + k') + 2$. Donc $a^2 + b^2 \equiv 2 \bmod 4$.
   • 2^ème^ cas : a est pair et b est impair. Alors il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$. Alors $a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 4(k^2 + k'^2 + k') + 1$. Donc $a^2 + b^2 \equiv 1 \bmod 4$.
   • 3^ème^ cas : a est impair et b est pair. a et b jouant des rôles symétriques, on obtient comme précédemment que $a^2 + b^2 \equiv 1 \bmod 4$.
   Donc dans tous les cas, on a $a^2 + b^2 \not\equiv 0 \bmod 4$, contredisant $a^2 + b^2 \equiv 0 \bmod 4$.
   Donc a et b sont pairs.
6. Supposons par l'absurde que a^2 et $b^2 - a^2$ ne soient pas premiers entre eux. Alors ils admettent un facteur premier p en commun. On a alors $p \mid a^2$ et $p \mid b^2 - a^2$. Alors $p \mid a^2 + (b^2 - a^2) = b^2$. Comme p est premier et $p \mid a^2$, $p \mid a$. De même, comme p est premier et $p \mid b^2$, $p \mid b$. (*on utilise la propriété si p est premier et $p \mid a_1a_2$ alors $p \mid a_1$ ou $p \mid a_2$*).
   Donc a et b admettent un facteur premier p en commun, ce qui est absurde puisque a et b sont premiers entre eux (leur seul diviseur commun positif est 1 qui n'est pas premier).
   Donc a^2 et $b^2 - a^2$ sont premiers entre eux.
7. Notons n le nombre de livres. Alors n est solution du système de congruences suivant :
$$\begin{cases} n \equiv 3 \bmod 10 \\ n \equiv 2 \bmod 17. \end{cases}$$
   Résolvons ce système.
   On a
$$\begin{aligned} 17 &= 1 \times 17 + 0 \times 10 \\ 10 &= 0 \times 17 + 1 \times 10 \\ 7 &= 1 \times 17 - 1 \times 10 \\ 3 &= -1 \times 17 + 2 \times 10 \\ 1 &= 3 \times 17 - 5 \times 10. \end{aligned}$$

On en déduit que $3 \times 17 = 51$ est solution du système de congruences

$$\begin{cases} n \equiv 1 \bmod 10 \\ n \equiv 0 \bmod 17 \end{cases}$$

et -50 est solution du système de congruences

$$\begin{cases} n \equiv 0 \bmod 10 \\ n \equiv 1 \bmod 17. \end{cases}$$

Ainsi, $x_0 = 3 \times 51 + 2 \times (-50) = 53$ est solution du système de congruences

$$\begin{cases} n \equiv 3 \bmod 10 \\ n \equiv 2 \bmod 17. \end{cases}$$

D'après le cours, l'ensemble des solutions du système de congruences est donc

$$\mathcal{S} = \{x_0 + 17 \times 10k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{53 + 170k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Comme le nombre de livres n est positif, le nombre minimum de livres est 53 et les nombres possibles sont $53 + 170k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun chiffre 1. (*Attention, on considère que le nombre* $0000010 = 10$ *est un nombre à* 2 *chiffres*) Déterminer le nombre d'éléments de A puis des ensembles suivants :

1. A_1, ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents,
2. A_2, ensemble des nombres pairs de A,
3. A_3, ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Pour écrire un élément de A, on a

- 8 choix pour le premier chiffre (tous les chiffres entre 0 et 9 sauf 0 et 1).

- 9 choix pour chacun des 6 autres chiffres (tous sauf 1).

On a donc $\text{card}(A) = 8 \times 9^6$.

1. Pour écrire un élément de A_1, on a
   - 8 choix pour le premier chiffre (tous sauf 0 et 1)
   -Pour le deuxième chiffre, on a le choix entre 8 chiffres (tous sauf 1 et le premier chiffre choisi),
   -Pour le troisième chiffre, on a le choix entre 7 chiffres (tous sauf 1, le premier et le deuxième chiffres)
   -etc
   -Pour le dernier chiffre, on a le choix entre 3 chiffres (tous sauf 1 et les 6 premiers chiffres : $10 - 1 - 6 = 3$)
   Donc $\text{card}(A_1) = 8 \times 8 \times 7 \times \ldots \times 3$.
   ou : les 6 *derniers chiffres forment un* 6*-arrangement dans un ensemble à* 8 *éléments (tous sauf le* 1 *et le premier chiffre). Donc* $\text{card}(A_1) = 8 \times 8 \times 7 \times \ldots \times 3$.
2. Un élément de A est pair si le $7^{\text{ème}}$ chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8. On a donc
   - 5 choix pour le $7^{\text{ème}}$ chiffre,
   - 8 choix pour le premier chiffre (tous sauf le 0 et le 1)
   - 9 choix pour chacun des 5 autres chiffres (tous les chiffres sauf 1).
   On a donc : $\text{card}(A_2) = 5 \times 8 \times 9^5$.
3. Remarquons qu'un élément de A_3 ne comporte pas le chiffre 0 puisque le premier chiffre est différent de 0. Les chiffres qui suivent sont donc strictement positifs puisque la suite des chiffres est strictement croissante.
   Il y a $\binom{8}{7}$ façons de choisir 7 chiffres tous distincts parmi $\{2, 3, \ldots, 9\}$ (tous sauf 0 ou 1), et une seule façon, ces 7 chiffres choisis, de les écrire en ordre croissant. On a donc
   $$\text{card}(A_3) = \binom{8}{7} = 8.$$

Exercice 4. Soit E un ensemble contenant n éléments. Soient a et b deux éléments de E distincts.

1. Déterminer le nombre de parties à p éléments contenant a et b.
2. Déterminer le nombre de parties de E à p éléments contenant a mais pas b.
3. Déterminer le nombre de parties de E à p éléments contenant b mais pas a.
4. Déterminer le nombre de parties à p éléments ne contenant ni a, ni b.
5. En déduire la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$.

1. a et b étant choisis, il reste à choisir $p-2$ éléments parmi les $n-2$ éléments restants. Il y a donc $\binom{n-2}{p-2}$ parties à p éléments contenant a et b.
2. a étant fixé, il reste à choisir $p-1$ éléments parmi les $n-2$ éléments restants (tous sauf a et b). Il y a donc $\binom{n-2}{p-1}$ parties à p éléments contenant a mais pas b.
3. b étant fixé, il reste à choisir $p-1$ éléments parmi les $n-2$ éléments restants (tous sauf a et b). Il y a donc $\binom{n-2}{p-1}$ parties à p éléments contenant b mais pas a.
4. On doit choisir p éléments parmi les $n-2$ éléments de $E \setminus \{a,b\}$. Il y a donc $\binom{n-2}{p}$ parties à p éléments ne contenant ni a ni b.
5. Le nombre de parties à p éléments de E est $\binom{n}{p}$. On peut aussi écrire $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ où E_1 est l'ensemble des parties à p éléments contenant a et b, E_2 est l'ensemble des parties à p éléments contenant a mais pas b, E_3 est l'ensemble des parties à p éléments contenant b mais pas a et E_4 est l'ensemble des parties à p éléments ne contenant ni a ni b. Ces ensembles étant deux à deux disjoints,
$$\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(E_1) + \mathrm{card}(E_2) + \mathrm{card}(E_3) + \mathrm{card}(E_4).$$
Des questions précédentes, on en déduit que
$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.$$

Exercice 5. Justifier les égalités suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ pour $n > 0$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{2^n}{n!}$,
4. $\displaystyle\binom{p}{m}\binom{p-m}{n-m} = \binom{n}{m}\binom{p}{n}$.
5. Soient m, k deux entiers naturels.
   (a) Justifier que $\displaystyle\binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1}$.
   (b) En déduire, pour tous entiers naturels $m, n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de
   $$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m}.$$
   (c) En déduire celle de $\displaystyle P = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{p=1}^{m} (k+p) \right)$.

---

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{1}{n!}(1+1)^n = \frac{2^n}{n!}$.
4.
$$\begin{aligned}
\binom{p}{m}\binom{p-m}{n-m} &= \frac{p!}{m!(p-m)!} \times \frac{(p-m)!}{(n-m)!(p-m-(n-m))!} \\
&= \frac{p!(p-m)!}{m!(p-m)!(n-m)!(p-n)!} \\
&= \frac{n!}{n!} \frac{p!}{m!(n-m)!(p-n)!} \\
&= \frac{n!}{m!(n-m)!} \times \frac{p!}{n!(p-n)!} \\
&= \binom{n}{m}\binom{p}{n}
\end{aligned}$$

5. (a) D'après la formule du triangle de Pascal, on a

$$\binom{m+k+1}{m+1} = \binom{m+k}{m+1} + \binom{m+k}{m}.$$

Donc

$$\binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1}.$$

(b) En utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k+1}{m+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m+1} \\
&= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{m+p}{m+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m+1} \quad \text{(dans la première somme, changement d'indice } p = k+1\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{m+k}{m+1} + \binom{m+n+1}{m+1} - \left(\binom{m}{m+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{m+k}{m+1} \right) \quad \text{(on sépare le 1er ou le dernier terme de la somme)} \\
&= \binom{m+n+1}{m+1} - \binom{m}{m+1} \\
&= \binom{m+n+1}{m+1}
\end{aligned}$$

(c) On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}
\prod_{p=1}^{m} (k+p) &= (k+1)(k+2)\dots(k+m) \\
&= \frac{(k+m)\dots(k+2)(k+1) \times k(k-1)\dots 2 \times 1}{k(k-1)\dots 2 \times 1} \\
&= \frac{(m+k)!}{k!} \\
&= m! \frac{(m+k)!}{k!(m+k-k)!} \\
&= m! \binom{m+k}{m}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$P = m! \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} = m! \binom{m+n+1}{m+1}.$$

Exercice 6. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} 5^{\mathrm{card}(X)}.$$

Notons, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $E_k = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid \mathrm{card}(X) = k\}$. Alors $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} E_k$, et les E_k sont deux à deux disjoints. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} 5^{\mathrm{card}(X)} &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{X \in E_k} 5^{\mathrm{card}(X)} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{X \in E_k} 5^k \text{ puisque } X \text{ est de cardinal } k \\
&= \sum_{k=0}^{n} 5^k \left(\sum_{X \in E_k} 1 \right)
\end{aligned}$$

Or $\sum_{X \in E_k} 1$ correspond au nombre de parties de E de cardinal k, il y en a $\binom{n}{k}$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} 5^{\mathrm{card}(X)} &= \sum_{k=0}^{n} 5^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k 1^{n-k} = (5+1)^n \\
&= 6^n.
\end{aligned}$$