

FEUILLE DE TD N° 1
Construction & Degré des polynômes

5 MARS 2021

Exercice 1. On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ \vdots \\ P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X) \end{cases}.$$

Déterminer le degré de P_n et le coefficient dominant.

Exercice 2. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré du polynôme :

$$P(X+1) - P(X)$$

en fonction du degré de P .

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, développer le polynôme

$$P(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4) \dots (1+X^{2^n}).$$

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes :

1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$. (Ici, X est l'indéterminée.)
2. $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. (Ici, X est l'indéterminée.)
3. $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.¹

Exercice 5. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X - 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$

Calculer le coefficient de X^2 dans P_n .

1. Ici, "o" est la composition des deux polynômes comme la compositions des applications.