Feuille de TD n° 1 - Correction
5 mars 2021

Exercice 1. On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ \vdots \\ P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X) \end{cases}.$$

Déterminer le degré de P_n et le coefficient dominant.

En calculant les premiers termes, puis en faisant récurrence double sur n, on trouve que $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant est 1 pour $n = 0$ et 2^{n-1} sinon.

Exercice 2. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré du polynôme :

$$P(X+1) - P(X)$$

en fonction du degré de P.

---

1. Si P est nul ou constant, le degré de $P(X+1) - P(X) = 0$ est $-\infty$.
2. Sinon, écrivons $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. En développant $P(X+1)$ grâce au binôme de Newton, on trouve :
$$P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l.$$
Le degré de $P(X+1) - P(X)$ est $n-1$ car le coefficient devant X^m pour $m \geq n$ est 0 et le coefficient devant X^{n-1} est na_n, qui est non nul.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, développer le polynôme

$$P(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n}).$$

On a $(1-X)P(X) = 1 - X^{2^{n+1}}$ et donc

$$P(X) = \frac{1 - X^{2^{n+1}}}{(1-X)} = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{2^{n+1}-1}.$$

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes :

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$. (Ici, X est l'indéterminée.)
2. $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. (Ici, X est l'indéterminée.)
3. $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$. [1]

---

1. $P = 0$ est une solution. Faisons une analyse-synthèse pour trouver les autres solutions.
   — Soit P une solution non nulle. Notons n son degré ($n \in \mathbb{N}$). Alors
   $$\deg P(X^2) = 2n \quad \text{et} \quad \deg(X^2+1)P(X) = 2+n.$$
   On en déduit que $n = 2$. Donc $\exists a, b, c \in \mathbb{K}, P(X) = aX^2 + bX + c$. On a $P(X^2) = (X^2+1)P(X) \Leftrightarrow aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = -a \end{cases}$. Ce qui est équivalent à P est de la forme $aX^2 - a$.
   — Réciproquement, les polynômes de la forme $aX^2 - a$ sont solutions.
   L'ensemble des solutions est $\{0\} \cup \{aX^2 - a, a \in \mathbb{K}\} = \{aX^2 - a, a \in \mathbb{K}\}$.
2. — Si (P, Q) est un couple solution de polynômes non nuls alors $Q^2 = XP^2$ donne $2\deg(Q) = 1 + 2\deg(P)$ avec $\deg(Q), \deg(P) \in \mathbb{N}$ ce qui est impossible. Il reste le cas où l'un des polynômes P ou Q est nul et l'autre, alors, l'est aussi.
   — Inversement, le couple nul est effectivement solution.
3. — Si $\deg(P) \geqslant 2$ alors $\deg(P \circ P) = \deg(P)^2 > \deg(P)$ et donc P n'est pas solution.
   — Si $\deg(P) \leqslant 1$ alors on peut écrire $P = aX + b$ et alors
   $$P \circ P = P \iff a(aX+b) + b = aX + b \iff a^2 = a, ab = 0.$$
   Après résolution on obtient $a = 1$ et $b = 0$ ou $a = 0$ et b quelconque.
   Finalement les solutions sont le polynôme X et les polynômes constants.

Exercice 5. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X - 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$

Calculer le coefficient de X^2 dans P_n.

Notons $P_n = \cdots + a_n X^2 + b_n X + c_n, n \in \mathbb{N}^\star$, et on a $a_1 = 0, b_1 = 1, c_1 = -2$.

$P_{n+1} = P_n^2 - 2 = \cdots + c_n^2 - 2 + 2b_n c_n X + (b_n^2 + 2a_n c_n)X^2$, donc $c_{n+1} = c_n^2 - 2, b_{n+1} = 2b_n c_n, a_{n+1} = b_n^2 + 2a_n c_n$.

On a $c_1 = -2$, $c_2 = 2$. Par récurrence, on a $c_n = 2, n \geq 2$.

De façon similaire, $b_1 = 1, b_2 = 2b_1 c_1 = -4$, par récurrence, on a $b_n = -4^{n-1}, n \geq 2$.

Puis, on a pour $n \geq 2$,

$$a_{n+1} = b_n^2 + 2a_n c_n = 4^{2n-2} + 4a_n. \tag{1}$$

---

1. Ici, "$\circ$" est la composition des deux polynômes comme la compositions des applications.

Méthode n^{o}1 On cherche a_n telle qu'il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $a_n + C \cdot 4^{2n-2}, n \geq 2$ est une suite géométrique de raison 4. C'est à dire

$$a_{n+1} + C \cdot 4^{2n} = 4(a_n + C \cdot 4^{2n-2}). \tag{2}$$

En comparant (1) et (2), on peut déduire $C = -\frac{1}{12}$.

Donc, $a_n - \frac{1}{12} \cdot 4^{2n-2} = 4^{n-2} \cdot (a_2 - \frac{1}{12} \cdot 4^2) = -\frac{4^{n-2}}{3}, n \geq 2$.

Alors, $a_n = \frac{4^{2n-2}}{12} - \frac{4^{n-2}}{3} = \frac{4^{2n-3} - 4^{n-2}}{3}, n \geq 2$, c'est le coefficient de X^2.

Méthode n^{o}2 On fait une méthode semblable à celle qu'on utilisera pour résoudre des équations différentielles. Pour $n \geq 2$, on veut résoudre (1). On commence par résoudre l'équation sans second membre :

$$a_{n+1} = 4a_n \tag{3}$$

La solution est $a_n = K4^{n-2}$ où K est une constante. Pour trouver la solution de (1), on applique la méthode de la « variation de la constante » : on suppose que K dépend de n, on note donc K_n et on remplace a_n par $K_n 4^{n-2}$ dans (1). On obtient :

$$4^{n-1} K_{n+1} = 4 \times 4^{n-2} K_n + 4^{2n-2} \tag{4}$$

(4) est équivalente à $K_{n+1} = K_n + 4^{n-1}$ qu'on résout en reconnaissant une série géométrique : $K_n = K_2 + \sum_{k=1}^{n-2} 4^k = K_2 + \frac{4^{n-1}-4}{3}$. Donc $a_n = 4^{n-2}(K_2 + \frac{4^{n-1}-4}{3})$. Comme $a_2 = 1$, on a que $K_2 = 1$. Donc on trouve que $a_n = \frac{4^{2n-3} - 4^{n-2}}{3}$ si $n \geq 2$ (et $a_1 = 0$).