TD 1 - Algèbre 2

Exercice 1

- $P_0(X) = 1$
- $P_1(X) = X$
- $\forall n \geq 2,\ P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$

Rappel : Si $P = a_0 + a_1X + \dots + \underbrace{a_n}_{\neq 0} X^n$ alors $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant est égal à a_n.

$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 2X P_1(X) - P_0(X)$

$= 2X \times X - 1 = 2X^2 - 1$.

$P_3 = 2X P_2(X) - P_1(X) = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$

$P_4 = 2X P_3(X) - P_2(X) = 2X(4X^3 - 3X) - 2X^2 - 1$

$= 8X^4 - 8X^2 - 1$

Donc $\deg P_0 = 0$ et CD : 1

$\deg P_1 = 1$ et CD : $1 = 2^0$

$\deg P_2 = 2$ et CD : $2 = 2^1$

$\deg P_3 = 3$ et CD : $4 = 2^2$

$\deg P_4 = 4$ et CD : $8 = 2^3$

Hypothèse : $\deg P_n = n$ et CD : 2^{n-1}.

Démontrons cela par récurrence.

Pour tout $n \geq 1$, on note (H_n) la propriété :

« P_n est degré n et de coeff. dominant 2^{n-1} ».

- Initialisation
  - Pour $n = 1$, (H_1) est vraie.
  - Pour $n = 2$, (H_2) est vraie.
- Hérédité. Soit $n \geq 3$. Supposons (H_{n-2}) et (H_{n-1}).

Montrons (H_n).

On a $P_n = \underbrace{2X \underbrace{P_{n-1}}_{\deg n-1}}_{\deg n} - \underbrace{P_{n-2}}_{\deg n-2}$

Rappel $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$ si $\deg P \neq \deg Q$.

Donc P_n est de degré n.

On a $P_{n-1} = \underbrace{2^{n-2}}_{CD} X^{\overbrace{n-1}^{}_{\deg}} + \dots$

Donc $2X P_{n-1} = 2^{n-1} X^n + \underbrace{\dots}_{\deg \leq n-1}$

Donc P_n est de degré n et de coeff dominant 2^{n-1},

D'où le résultat.

Exercice 2 $\quad Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

Si $P(X) = X^2$ alors $P(X+1) = (X+1)^2 = X^2+2X+1$

Donc $Q(X) = X^2+2X+1 - X^2 = 2X+1$. $\quad n=2$

$\deg P = 2$ et $\deg Q = 1$ $\quad$ et $a_2 = 1$

- Si $P(X) = 0$ alors $P(X+1) = 0$ donc $Q(X) = 0$

donc si $\deg P = -\infty$ alors $\deg Q = -\infty$.

- Si $P(X) = a$ alors $P(X+1) = a$ donc $Q(X) = 0$.

donc si $\deg P = 0$ alors $\deg Q = -\infty$.

- Soit P un polynôme de degré n.

P s'écrit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$.

On a $P(X+1) = \underbrace{a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + \dots}_{\deg < n-1} + \underbrace{a_{n-1}(X+1)^{n-1}}_{\deg n-1} + \underbrace{a_n(X+1)^n}_{\deg n}$

$a_n(X+1)^n = a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k = a_n X^n + a_n n X^{n-1} + \dots + 1 \times a_n$

Donc $\deg (X+1)^n = n$

Donc $P(X+1)$ est de degré n et de coeff dominant a_n.

Donc $\varphi(X) = P(X+1) - P(X)$ est de degré $\leq n-1$

car $P(X+1)$ et $P(X)$ sont tous les 2 de degré n

et même coefficient dominant.

$$\cancel{a_n X^n} + \underbrace{b_n X^{n-1} + \dots}_{\deg \leq n-1} \qquad - \left(\cancel{a_n X^n} \underbrace{+ c_n X^{n-1} + \dots}_{\deg \leq n-1}\right)$$

$$a_{n-1}(X+1)^{n-1} = a_{n-1}\left(X^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \dots + 1\right)$$
$$= a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-1}(n-1)X^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Le coefficient devant le X^{n-1} dans $P(X+1)$ est

$na_n + a_{n-1}$, et dans $P(X)$ est a_{n-1}.

Donc le coefficient devant le X^{n-1} dans $\varphi(X)$

est $na_n + a_{n-1} - a_{n-1} = na_n$.

Exercice 3

1ère méthode : par récurrence (si idée du résultat).

- $n = 0$, $P_0 = 1 + X$

$n = 1$, $P_1 = (1+X)(1+X^2) = 1 + X + X^2 + X^3$ $\quad 4-1 = 2^2 - 1$

$n = 2$, $P_2 = (1+X)(1+X^2)(1+X^4) = (1+X+X^2+X^3)(1+X^4)$

$= 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7$ $\quad 8-1 = 2^3 - 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = 1 + X + X^2 + \dots + X^p$ avec $p = 2^{n+1} - 1$.

2ème méthode :

- $(1-X)P(X) = \underbrace{\underbrace{(1-X)(1+X)}_{1-X^2}(1+X^2)}_{1-X^4} \dots (1+X^{2^n})$

$= \dots = (1-X^{2^n})(1+X^{2^n})$

$= 1 - X^{2^{n+1}}$

Donc $P(X) = \dfrac{1 - X^{2^{n+1}}}{1-X} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$= 1 + X + X^2 + \cdots + X^{2^{n+1}-1}$.

Exercice 4

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ $\qquad P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$

$P(X^2) = a_0 + a_1 X^2 + a_2 X^4 + \cdots + a_n X^{2n}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que

$P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Alors $2 \deg P = \deg(P) + 2$, donc $\deg P = 2$.

Donc P s'écrit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $a_2 \neq 0$.

On obtient $a_0 + a_1 X^2 + a_2 X^4 = (X^2+1)(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$

$ + 0X \qquad + 0X^3 \qquad = a_0 + a_1 X + (a_2 + a_0) X^2 + a_1 X^3 + a_2 X^4$

Donc $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 + a_0 = a_1 \end{cases}$, donc $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -a_0 \end{cases}$

Donc $P = a_0 - a_0 X^2 = a_0 (1 - X^2)$ où $a_0 \in \mathbb{R}$.

Vérifions que $P = a_0(1-X^2)$ est solution :

On a $P(X^2) = a_0(1-X^4)$

et $(X^2+1)P(X) = (X^2+1)a_0(1-X^2) = a_0(1-X^4)$.

Donc l'ensemble des solutions est $S = \{a_0(1-X^2),\ a_0 \in \mathbb{R}\}$.

2. $Q^2 = XP^2$.

$Q^2 = Q \times Q$

$P=0$ et $Q=0$ alors (P,Q) est solution.

Soit (P,Q) une éventuelle solution.

On suppose que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$.

$(a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n)^2$

On a $\underbrace{2\deg Q}_{\text{nombre pair}} = \underbrace{2\deg P + 1}_{\text{nombre impair}}$. Impossible.

(puisque $\deg Q \geq 0$ $(Q \neq 0)$
$\deg P \geq 0$ $(P \neq 0)$)

Donc il n'y a pas de solution.

3. $P \circ P = P$

$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$Q = b_0 + b_1 X + \dots + b_p X^p$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ solution non nulle,

alors $(\deg P)^2 = \deg P$

Donc $(\deg P)(\deg P - 1) = 0$

donc $\deg P = 0$ ou $\deg P = 1$.

$P \circ Q = a_0 + a_1(b_0 + b_1 X + \dots + b_p X^p) + \dots$
$+ a_n(b_0 + b_1 X + \dots + b_p X^p)^n$
$= \dots + a_n b_p^n X^{pn}$.

Si $\deg P = 0$ alors $P = a \in \mathbb{R}$

et $P \circ P = a = P$

Si $\deg P = 1$ alors $P = a_0 + a_1 X$ avec $a_1 \neq 0$.

Donc $a_0 + a_1(a_0 + a_1 X) = a_0 + a_1 X$

soit $\cancel{a_0} + a_1 a_0 + a_1^2 X = \cancel{a_0} + a_1 X$

Donc $\begin{cases} a_1^2 = a_1 \\ a_1 a_0 = 0 \end{cases}$, donc $\begin{cases} a_1 = 1 \text{ et } a_0 = 0 \\ \text{ou} \\ \cancel{a_1 = 0 \text{ et } a_0 \in \mathbb{R}} \end{cases}$

Donc $P = X$.

On vérifie que $P \circ P = P$: $P \circ P = X = X$.

Donc l'ensemble des solutions est $S = \{X\} \cup \{a,\ a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$P_n = \dots + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

$P_1 = \dots + a_1 X^2 + b_1 X + c_1 = X - 2$ donc $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = -2$

$P_2 = (X-2)^2 - 2 = X^2 - 4X + 2$

$= \dots + a_2 X^2 + b_2 X + c_2$ donc $a_2 = 1$, $b_2 = -4$, $c_2 = 2$

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= P_n^2 - 2 \\
&= (\dots + a_n X^2 + b_n X + c_n)^2 - 2 \\
&= (\dots + a_n X^2 + b_n X + c_n)(\dots + a_n X^2 + b_n X + c_n) - 2 \\
&= \dots + a_n c_n X^2 + b_n^2 X^2 + b_n c_n X + c_n a_n X^2 + c_n b_n X + c_n^2 - 2 \\
&= \dots + (2a_n c_n + b_n^2) X^2 + 2 b_n c_n X + c_n^2 - 2. \\
&= \dots + a_{n+1} X^2 + b_{n+1} X + c_{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n c_n + b_n^2 \\ b_{n+1} = 2 b_n c_n \\ c_{n+1} = c_n^2 - 2 \end{cases}$.

On a $c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $c_3 = 4 - 2 = 2$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 2$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} = 4 b_n = 4 \times 4 b_{n-1}$

$= \dots = 4^n b_1$

et $b_1 = 1$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 4^{n-1}$

· Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 4 a_n + 4^{2n-2}$.

On cherche $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous la forme $a_n = k_n 4^{n-2}$.

Alors $k_{n+1} 4^{n-1} = k_n 4^{n-1} + 4^{2n-2}$.

Donc $k_{n+1} = k_n + 4^{n-1}$

$= k_{n-1} + 4^{n-2} + 4^{n-1}$

$$= b_{n-2} + 4^{n-3} + 4^{n-2} + 4^{n-1}$$

$$= \dots$$

$$= b_2 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-2} + 4^{n-1}$$

$$= b_2 + 4\left(1 + 4 + \dots + 4^{n-2}\right)$$

$$= b_2 + 4\,\frac{1-4^{n-1}}{1-4} = \underbrace{1 + \frac{4}{3}\left(4^{n-1} - 1\right)}_{b_{n+1}}$$

On a $a_2 = 1 = b_2$

Donc $a_n = b_n 4^{n-2} = \left(1 + \frac{4}{3}\left(4^{n-2} - 1\right)\right) \times 4^{n-2}$

$$= 4^{n-2} + \frac{1}{3}\left(4^{2n-\cancel{1}\,3} - 4^{n-1}\right)$$

$$= \frac{3 \times 4^{n-2} + 4^{2n-3} - 4 \times 4^{n-2}}{3}$$

$$= \frac{4^{2n-3} - 4^{n-2}}{3}$$