Feuille de TD n° 2

Structure d'espace vectoriel, sous-espaces vectoriels et combinaisons linéaires

7 mars 2021

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ des lois $+$ et $\cdot$ définies, pour tout (x_1, x_2) et (y_1, y_2) éléments de $\mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par

- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
- $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$.

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 5y - 1 = 0\}$,
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x + y^2 = 0\}$,
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$
4. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geq 2\}$,
5. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X^2) = P' + X^4 P\}$,
6. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$,
7. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(a) = f(b) + 1\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = f'(0)\}$.
9. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est injective}\}$,
10. $\{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0\}$
11. $\left\{\begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\right\}$,
12. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
13. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\}$,
14. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$
15. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. L'ensemble des fonctions majorées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
2. Montrer que l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. L'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
4. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $F = \{f - g \mid f, g \in \mathcal{C}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4.

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, $7X^2 + 2X - 4$ est-il combinaison linéaire de $2X^3 - 5X + 1$ et $X^2 + X - 2$?
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $f : x \longmapsto \cos^2(x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions $f_1 : x \longmapsto 1$ et $f_2 : x \longmapsto \cos(2x)$?
3. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $g : x \longmapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions sin et cos ?
4. Dans $\mathbb{R}^3$, à quelle condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$, le vecteur $(1, -a, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 1, 1)$ et $(a, 0, 2)$?
5. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A^2 est combinaison linéaire de $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et A.