Corrigé du TD n° 2

Structure d'espace vectoriel, sous-espaces vectoriels et combinaisons linéaires

15 mars 2021

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ des lois $+$ et $\cdot$ définies, pour tout (x_1, x_2) et (y_1, y_2) éléments de $\mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par

- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
- $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$.

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Seul le point $1 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ de la définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel n'est pas vérifiée. En effet, pour $x_2 \neq 0$, on a

$$1 \cdot (x_1, x_2) = (1 \times x_1, 0) = (x_1, 0) \neq (x_1, x_2).$$

Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ n'est donc pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 5y - 1 = 0\}$,
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x + y^2 = 0\}$,
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$
4. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geq 2\}$,
5. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X^2) = P' + X^4 P\}$,
6. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$,
7. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(a) = f(b) + 1\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
8. $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = f'(0)\}$.
9. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est injective}\}$,
10. $\{f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0\}$
11. $\left\{\begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\right\}$,
12. $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
13. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\}$,
14. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$
15. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$.

---

1. Non : $(0, 0) \notin E_1$.
2. Non : par exemple, $(-1, \sqrt{2}) \in E_2$ mais $-1(-1, \sqrt{2}) = (1, -\sqrt{2}) \notin E_2$ donc E_2 n'est pas stable par combinaisons linéaires.
3. Oui.
   - $E_3 \subset \mathbb{R}^3$.
   - $\vec{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in E_3$ car $0 - 0 + 0 = 0$ et $2 \times 0 - 0 = 0$.

- Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) des éléments de E_3 et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Montrons que $\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. On a $\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_2 + y_2)$ et
  $$\begin{aligned}(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2) &= \lambda(x_1 - y_1 + z_1) + (x_2 - y_2 + z_2)\\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0\end{aligned}$$
  car (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) appartiennent à E_3, et de même
  $$\begin{aligned}2(\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) &= \lambda(2x_1 - x_2) + 2y_1 - y_2\\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

  De ces trois points, on en déduit que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Non : le polynôme nul 0 est de degré $-\infty$ donc n'appartient pas à E_4.
5. Oui.
   - $E_5 \subset \mathbb{R}[X]$.
   - Le polynôme nul appartient à E_5.
   - Soient P_1 et P_2 des éléments de E_3 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
     On a
     $$\begin{aligned}(\lambda P_1 + P_2)(X^2) &= \lambda P_1(X^2) + P_2(X^2)\\ &= \lambda(P_1' + X^4 P_1) + P_2' + X^4 P_2\\ &= (\lambda P_1 + P_2)' + X^4(\lambda P_1 + P_2).\end{aligned}$$
     Donc $\lambda P_1 + P_2 \in E_5$.

   De ces trois points, on en déduit que E_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
6. Oui.
   - $E_6 \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   - L'application nulle appartient à E_6 puisqu'elle vaut 0 en 0.
   - Soient f et g des éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
     On a
     $$\begin{aligned}(\lambda f + g)(0) &= \lambda \times f(0) + g(0)\\ &= \lambda \times 0 + 0\\ &= 0\end{aligned}$$
     car f et g appartiennent à E_6.

   De ces trois points, on en déduit que E_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
7. Non : l'application nulle n'appartient pas à E_7 puisque qu'elle vaut 0 en a et en b et $0 \neq 0 + 1$!
8. Oui.
   - $E_8 \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
   - L'application nulle appartient à E_8 puisqu'elle vaut 0 en 0 et en 1 et sa dérivée est nulle en 0.
   - Soient f et g des éléments de E_8 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
     $$\begin{aligned}(\lambda f + g)(0) + (\lambda f + g)(1) &= \lambda f(0) + g(0) + \lambda f(1) + g(1)\\ &= \lambda(f(0) + f(1)) + g(0) + g(1)\\ &= \lambda f'(0) + g'(0)\\ &= (\lambda f + g)'(0).\end{aligned}$$
     Donc $\lambda f + g \in E_8$.

   De ces trois points, on en déduit que E_8 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
9. Non : l'application nulle n'appartient pas à E_7 puisqu'elle n'est pas injective.
10. Oui.
    - $E_{10} \subset \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
    - L'application nulle appartient à E_{10} puisque $\int_a^b 0 \mathrm{d}t = 0$.
    - Soient f et g des éléments de E_{10} et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
      On a
      $$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f + g)(t) \mathrm{d}t &= \int_a^b \lambda f(t) + g(t) \mathrm{d}t\\ &= \lambda \int_a^b f(t) \mathrm{d}t + \int_a^b g(t) \mathrm{d}t\\ &= \lambda \times 0 + 0\\ &= 0.\end{aligned}$$
      Donc $\lambda f + g \in E_{10}$.

De ces trois points, on en déduit que E_{10} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

11. Oui.
    - $E_{11} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
    - La matrice nulle appartient à E_{11} avec $a = b = c = 0$.
    - Soient $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ 2c_1 & -b_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 + b_2 & c_2 \\ 2c_2 & -b_2 \end{pmatrix}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
    On a
    $$\begin{aligned} \lambda M_1 + M_2 &= \begin{pmatrix} \lambda(a_1 + b_1) + a_2 + b_2 & \lambda c_1 + c_2 \\ \lambda 2c_1 + 2c_2 & \lambda(-b_1) - b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 + (\lambda b_1 + b_2) & \lambda c_1 + c_2 \\ 2(\lambda c_1 + c_2) & -(\lambda b_1 + b_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
    Donc $\lambda M_1 + M_2 \in E_{11}$.

    De ces trois points, E_{11} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
12. Non : la matrice nulle n'appartient pas à E_{12}.
13. Non : la suite nulle n'appartient pas à E_{13} puisqu'elle est de limite 0 en l'infini.
14. Oui.
    - $E_{14} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui est un espace vectoriel.
    - La suite nulle appartient à E_{14} puisque la relation de récurrence est vérifiée.
    - Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de E_{14} et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
    Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= \lambda(u_{n+1} + u_n) + v_{n+1} + v_n \\ &= \lambda u_{n+1} + v_{n+1} + \lambda u_n + v_n \\ &= w_{n+1} + w_n. \end{aligned}$$
    Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{14}$.

    De ces trois points, E_{14} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
15. Oui.
    - $E_{15} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
    - La suite nulle appartient à E_{15} puisqu'elle est convergente.
    - Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de E_{15} et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le sont.

    De ces trois points, E_{15} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. L'ensemble des fonctions majorées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
2. Montrer que l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. L'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
4. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $F = \{f - g \mid f, g \in \mathcal{C}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

---

1. Non. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto -x^2$ est majorée par 0 mais $-1 \times f = -f : x \longmapsto x^2$ n'est pas majorée.
2. Oui. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
    - $\mathcal{B} \subset E$.
    - L'application nulle est bornée donc appartient à $\mathcal{B}$.
    - Soient f et g deux éléments de $\mathcal{B}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
    Comme $f \in \mathcal{B}$, il existe $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M_1$.
    Comme $g \in \mathcal{B}$, il existe $M_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq M_2$.
    On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
    $$\begin{aligned} |(\lambda f + g)(x)| &= |\lambda f(x) + g(x)| \\ &\leq |\lambda||f(x)| + |g(x)| \\ &\leq |\lambda| M_1 + M_2. \end{aligned}$$
    Donc $\lambda f + g$ est bornée et donc appartient à $\mathcal{B}$.

    De ces trois points, $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Non. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x$ est croissante mais la fonction $-1 \times f = -f : x \longmapsto -x$ n'est pas croissante (puisque strictement décroissante).
4.
   - $F \subset E$.
   - On a $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} - 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in \mathcal{C}$. Donc l'application nulle $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F$.
   - — Soient h_1 et h_2 deux éléments de F. Il existe $(f_1, g_1, f_2, g_2) \in \mathcal{C}^4$ tel que $h_1 = f_1 - g_1$ et $h_2 = f_2 - g_2$.
     Alors $h_1 + h_2 = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2)$ et $f_1 + f_2 \in \mathcal{C}$ comme somme de deux fonctions croissantes, et de même $g_1 + g_2 \in \mathcal{C}$.
     Donc $h_1 + h_2 \in F$.
     — Soit $h \in F$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $(f, g) \in \mathcal{C}^2$ tel que $h = f - g$.
     Si $\lambda \geq 0$ alors $\lambda h = \lambda f - \lambda g$ et $\lambda f \in \mathcal{C}$ et $\lambda g \in \mathcal{C}$ (car $\lambda \geq 0$).
     Si $\lambda < 0$ alors $\lambda h = \lambda f - \lambda g = (-\lambda g) - (-\lambda f)$ et $-\lambda g \in \mathcal{C}$ et $-\lambda f \in \mathcal{C}$ (car $-\lambda > 0$).

   De ces trois points, F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4.

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, $7X^2 + 2X - 4$ est-il combinaison linéaire de $2X^3 - 5X + 1$ et $X^2 + X - 2$?
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $f : x \longmapsto \cos^2(x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions $f_1 : x \longmapsto 1$ et $f_2 : x \longmapsto \cos(2x)$?
3. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $g : x \longmapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions sin et cos ?
4. Dans $\mathbb{R}^3$, à quelle condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$, le vecteur $(1, -a, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 1, 1)$ et $(a, 0, 2)$?
5. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A^2 est combinaison linéaire de $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et A.

---

1. Non, sinon il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $7X^2 + 2X - 4 = \lambda(2X^3 - 5X + 1) + \mu(X^2 + X - 2)$ et donc, par identification des coefficients, le système suivant admet des solutions : $\begin{cases} 0 = 2\lambda \\ 7 = \mu \\ 2 = -5\lambda + \mu \\ -4 = \lambda - 2\mu \end{cases}$
   ce qui n'est pas le cas.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$, donc f est combinaison linéaire des fonctions f_1 et f_2.
3. Non, sinon il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$. En particulier, pour $x = 0$, on obtient $0 = \mu$ puis pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, $0 = \lambda$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 0$, ce qui est absurde.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $(1, -a, 1)$ soit combinaison linéaire de $(1, 1, 1)$ et $(a, 0, 2)$. Alors, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(1, -a, 1) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(a, 0, 2)$. On obtient donc le système
   $$\begin{cases} 1 = \lambda + a\mu \\ -a = \lambda \\ 1 = \lambda + 2\mu \end{cases}.$$
   On en déduit
   $$\begin{cases} a = -\lambda \\ \mu(a - 2) = 0 \\ 1 = \lambda + 2\mu \end{cases}.$$
   Donc $a = 2$ ou $\mu = 0$ et donc $a = -1$.
   Pour $a = 2$, on obtient $\lambda = -2$ et $\mu = \dfrac{2}{3}$ et pour $a = -1$, on a $\mu = 0$ et $\lambda = 1$, et dans ces deux cas, $(1, -a, 1)$ est bien combinaison linéaire de $(1, 1, 1)$ et $(a, 0, 2)$.
   Donc le vecteur $(1, -a, 1)$ est combinaison linéaire de $(1, 1, 1)$ et $(a, 0, 2)$ si et seulement si $a = 2$ ou $a = -1$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors A s'écrit sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
   On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cb + d^2 \end{pmatrix}$.
   On cherche donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu a & \mu b \\ \mu c & \lambda + \mu d \end{pmatrix}.$$
   On résout donc le système $\begin{cases} \lambda + \mu a = a^2 + bc \\ \mu b = b(a + d) \\ \mu c = c(a + d) \\ \lambda + \mu d = cb + d^2 \end{cases}$.
   On en déduit que $\mu = a + d$ et $\lambda = bc - ad$.
   Donc $A^2 = (a + d)A + (bc - ad)I_2$.