Géométrie 2 - TD 2

Exercice 1

$\underline{1 \cdot \vec{x} = \vec{x}}$.

$. \ \underset{\lambda}{1} \cdot (\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{1}) = (1, 0)$.

$1 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, 0) \underset{\text{si } x_2 \neq 0}{\neq} (x_1, x_2)$

Or si $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ était un ev, on aurait $1 \cdot (1,1) = (1,1)$
$\neq (1,0)$.

Donc $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ n'est pas un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 2

Caractérisation : F est un sev de E ssi

- $F \subset E$
- $\vec{0}_E \in F$
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$
  $\lambda \vec{x} + \vec{y} \in F$.
  ou $\vec{x} + \vec{y} \in F$
  et $\lambda \vec{x} \in F$.

Ici $E = \mathbb{R}^2$

1. $\underset{\underset{(0,0)}{\|}}{\vec{0}_E} \notin E_1 : 2 \times 0 - 5 \times 0 - 1 = -1 \neq 0$.

Donc E_1 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

2. $x^3 + x + y^2 = 0$

$y^2 = -x^3 - x$.

Si $x = -1$, $y^2 = 2$, prenons $y = \sqrt{2}$.

Alors $(-1, \sqrt{2}) \in E_2$.

On a $\underbrace{-1}_{\lambda} \times \underbrace{(-1, \sqrt{2})}_{\vec{x}} = (1, -\sqrt{2}) \notin E_2$

car $1^3 + 1 + (-\sqrt{2})^2 = 4 \neq 0$.

Donc E_2 n'est pas stable par C.L., donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

3. – $E_3 \subset \mathbb{R}^3$

– $\vec{0}_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E_3$: $0-0+0=0$ et $2\times 0 - 0 = 0$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in E_3$.

$$\lambda\vec{x} + \vec{y} = (\underbrace{\lambda x_1 + y_1}_{x}, \underbrace{\lambda x_2 + y_2}_{y}, \underbrace{\lambda x_3 + y_3}_{z}) \overset{?}{\in} E_3$$

$$\lambda x_1 + y_1 - (\lambda x_2 + y_2) + \lambda x_3 + y_3$$
$$= \lambda \underbrace{(x_1 - x_2 + x_3)}_{=0 \text{ car } \vec{x} \in E_3} + \underbrace{(y_1 - y_2 + y_3)}_{=0 \text{ car } \vec{y} \in E_3}$$
$$= 0.$$

De même, $\lambda\vec{x} + \vec{y}$ vérifie la $2^{\text{ème}}$ équation.

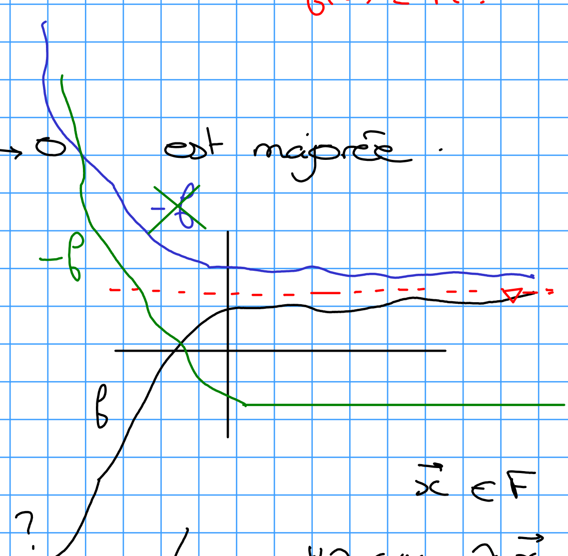
Donc $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in E_3$.

Donc E_3 est un sev de $\mathbb{R}^3$.

f est majoré :
$\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
$f(x) \leq M$.

Exercice 3

1. • $\vec{0}_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$: la fonction nulle $x \mapsto 0$ est majorée.
(par exemple par 1).



• Prenons $f(x) = -e^x$

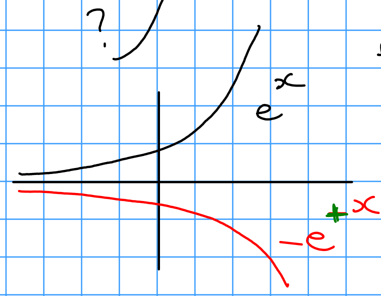
Alors f est majorée par 0

et $-f = -1 \times f$ n'est pas majorée !

Donc cet ensemble n'est pas un sev de E.

$\vec{x} \in F$

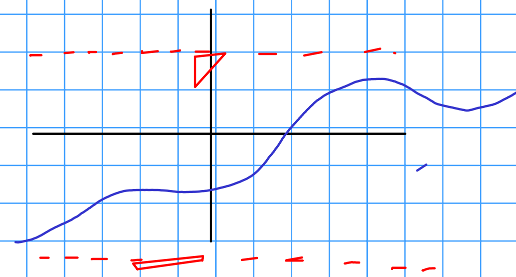
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda\vec{x} \in F$.



2. . $\vec{0}_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$: la fonction nulle est bornée.

f est bornée : $\exists M > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq M$.

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f, g 2 fonctions bornées. $\lambda f + g$ est-elle bornée ?



Il existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M_1$

Il existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq M_2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

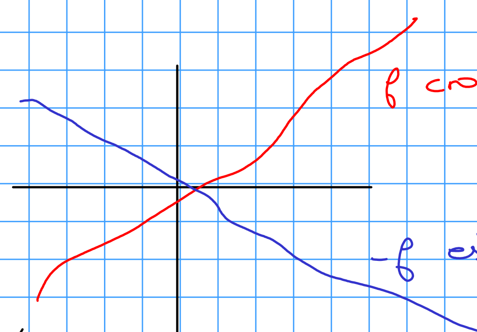
$$|(\lambda f + g)(x)| = |\lambda f(x) + g(x)| \leq |\lambda| |f(x)| + |g(x)|$$
$$\leq \underbrace{|\lambda| M_1 + M_2}_{M_3 \in \mathbb{R}}$$

Donc $\lambda f + g$ est bornée.

3. NON : ce n'est pas stable par CL.

$f : x \mapsto x$ croissante

$-f : x \mapsto -x$ n'est pas croissante.



4. $F = \{ f - g,\ f, g \in \mathcal{C} \}$.

. $F \subset E$

. $\vec{0}_E$: la fonction nulle $\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0\end{array}$.

$$0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}} = \underbrace{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}}_{\uparrow \ \mathcal{C}} - \underbrace{0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}}_{\uparrow \ \mathcal{C}} \in F.$$

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soient h_1 et h_2 deux éléments de F.

1) Comme $h_1 \in F$, il existe $f_1, g_1 \in \mathcal{C}$ telles que $h_1 = f_1 - g_1$.

Donc $\lambda h_1 = \lambda f_1 - \lambda g_1$

Si $\lambda \geq 0$ alors λf_1 et λg_1 sont croissantes

(Si f est croissante et $\lambda \geq 0$ alors λf est croissante.

$x \leq y$, $f(x) \leq f(y)$, $\lambda f(x) \leq \lambda f(y)$)

Donc $\lambda h_1 \in F$,

Si $\lambda < 0$, $\lambda h_1 = -\lambda g_1 - (-\lambda f_1) \in F$.

$$= \underbrace{\underbrace{(-\lambda)}_{>0} g_1}_{\in \mathcal{C}} - \underbrace{\underbrace{(-\lambda)}_{>0} f_1}_{\mathcal{C}}$$

Dans tous les cas, $\lambda h_1 \in F$.

- $h_1 = f_1 - g_1$ avec $f_1, g_1 \in \mathcal{C}$

  $h_2 = f_2 - g_2$ avec $f_2, g_2 \in \mathcal{C}$.

Donc $h_1 + h_2 = f_1 - g_1 + f_2 - g_2 = \underbrace{\overbrace{f_1 + f_2}^{f}}_{\mathcal{C}} - \underbrace{(\overbrace{g_1 + g_2}^{g})}_{\mathcal{C}} \in H$.

Donc F est un sev de E.