Feuille de TD n° 4

Sous-espaces vectoriels engendrés, familles de vecteurs

25 mars 2021

Exercice 1. Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en les écrivant comme des sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs. On donnera une famille génératrice.

1. $A = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
2. $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$,
3. $C = \left\{P = aX^2 + (b - 2a)X + a - b + c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$,
4. $D = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 2P(X + 1) = XP'(X)\}$,
5. $E = \left\{\begin{pmatrix}a-b & a\\ -b & b+c\end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

Exercice 3. Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

1. $((1, 1, -1), (2, 1, 3), (0, -1, 5)$ dans $\mathbb{R}^3$,
2. $((1, 1, 0), (1, 2, 1), (2, 3, 2))$ dans $\mathbb{R}^3$,
3. $(X^2, X^2 + X + 2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$,
4. $(X^2, X^2 - X, X^2 + X)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$,
5. $(X^2, X(X - 2), (X - 2)^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$,
6. $\left(\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & 6\\0 & -3\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & 6\\0 & -3\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
8. $(\mathrm{id}, \exp)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
9. $(\sin, \cos, f_3, f_4)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ où $f_3 : x \longmapsto x\sin(x)$ et $f_4 : x \longmapsto x\cos(x)$,
10. $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ où, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : x \longmapsto \exp(\alpha x)$.
11. $((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ dans l'espace des suites réelles.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On considère une famille libre de quatre vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :
   (a) $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
   (b) $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_3 + \vec{e}_4)$,
2. Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que pour tout $\vec{a} \in E \setminus \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, la famille $(\vec{e}_1 + \vec{a}, \ldots, \vec{e}_n + \vec{a})$ est libre.

Exercice 5. Déterminer une base de chacun des ensembles suivants, après avoir justifié que ce sont des espaces vectoriels :

1. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.
2. $B = \left\{\begin{pmatrix}a+b & b\\ -b & a-b\end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
3. $C = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$.

Exercice 6. Trouver une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, -1)$, $(3, -1, 2)$, $(4, 1, 1)$ et $(2, -3, 3)$.