Corrigé du TD n° 4

Sous-espaces vectoriels engendrés et familles de vecteurs

29 mars 2021

Exercice 1. Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Éléments de correction : Par exemple, par opérations sur les Vect, on montre que

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Exercice 2. Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en les écrivant comme des sous-espaces vectoriels engendrés par une famille de vecteurs. On donnera une famille génératrice.

1. $A = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
2. $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$,
3. $C = \left\{P = aX^2 + (b - 2a)X + a - b + c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$,
4. $D = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 2P(X + 1) = XP'(X)\}$,
5. $E = \left\{\begin{pmatrix}a-b & a\\ -b & b+c\end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

Éléments de correction.

1. $A = \mathrm{Vect}((1, 2, 3))$. Une famille génératrice est donc $((1, 2, 3))$.
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
   $(x, y, z, t) \in B$ si et seulement si $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{cases}$, si et seulement si $\begin{cases} z = x + 2y \\ t = -x + y \end{cases}$.
   Donc $B = \{(x, y, x+2y, -x+y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 1, -1)+y(0, 1, 2, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1)\big)$.
   Une famille génératrice est donc $((1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 1))$.
3. $C = \mathrm{Vect}(X^2 - 2X + 1, X - 1, 1)$. Une famille génératrice est donc $(X^2 - 2X + 1, X - 1, 1)$.
4. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$.
   On a $P \in D$ si et seulement si
   $$2(a + b(X + 1) + c(X + 1)^2 + d(X + 1)^3) = X(b + 2cX + 3dX^2),$$
   soit si et seulement si
   $$2a + 2b + 2c + 2d + (2b + 4c + 6d)X + (2c + 6d)X^2 + 2dX^3 = bX + 2cX^2 + 3dX^3,$$
   soit encore, par identification des coefficients, si et seulement si
   $$\begin{cases} 2a + 2b + 2c + 2d = 0 \\ 2b + 4c + 6d = b \\ 2c + 6d = 2c \\ 2d = 3d \end{cases},$$
   soit si et seulement si
   $$\begin{cases} a = 3c \\ b = -4c \\ d = 0 \end{cases}.$$
   Donc $P \in D$ si et seulement si $P = 3c - 4cX + cX^2$.
   Donc $D = \{3c - 4cX + cX^2 \mid c \in \mathbb{R}\} = \{c(3 - 4X + X^2) \mid c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(3 - 4X + X^2)$. Une famille génératrice est donc $(3 - 4X + X^2)$.

5. $E = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

   Une famille génératrice est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 3. Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

1. $((1,1,-1),(2,1,3),(0,-1,5))$ dans $\mathbb{R}^3$,
2. $((1,1,0),(1,2,1),(2,3,2))$ dans $\mathbb{R}^3$,
3. (X^2, X^2+X+2) dans $\mathbb{R}_2[X]$,
4. (X^2, X^2-X, X^2+X) dans $\mathbb{R}_2[X]$,
5. $(X^2, X(X-2), (X-2)^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$,
6. $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
8. $(\mathrm{id}, \exp)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,
9. $(\sin, \cos, f_3, f_4)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ où $f_3 : x \longmapsto x\sin(x)$ et $f_4 : x \longmapsto x\cos(x)$,
10. $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ où, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : x \longmapsto \exp(\alpha x)$.
11. $((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ dans l'espace des suites réelles.

Éléments de correction.

1. Non. La famille est liée car $-2(1,1,-1)+1(2,1,3)-1(0,-1,5)=(0,0,0)$. (coefficients que l'on trouve par exemple par résolution d'un système).
2. Oui.
3. Oui.
4. Non. La famille est liée car $-2\times X^2 + (X^2-X) + (X^2+X) = 0$.
5. Oui. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 X(X-2) + \lambda_3 (X-2)^2 = 0$. En évaluant en 0, on obtient $4\lambda_3 = 0$, donc $\lambda_3 = 0$.
   On a donc $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 X(X-2) = 0$. En évaluant en $X=2$, on obtient $4\lambda_1 = 0$, donc $\lambda_1 = 0$.
   Donc $\lambda_2 X(X-2) = 0$, et donc $\lambda_2 = 0$.
   Donc $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,0)$ et la famille est libre.
6. Non. La famille est liée car $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Oui.
8. Oui. Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 \mathrm{id} + \lambda_2 \exp = 0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lambda_1 x + \lambda_2 \mathrm{e}^x = 0$.
   En particulier, pour $x=0$, on obtient $\lambda_2 = 0$. Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lambda_1 x = 0$ puis pour $x=1$, $\lambda_1 = 0$.
   Donc la famille $(\mathrm{id},\exp)$ est libre.
9. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ tel que
   $$\lambda_1 \sin + \lambda_2 \cos + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}.$$
   Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\sin(x) + \lambda_2\cos(x) + \lambda_3 x\sin(x) + \lambda_4 x\cos(x) = 0$.
   Pour $x=0$, on a $\lambda_2 = 0$, puis pour $x=\pi$, on a $-\pi\lambda_4 = 0$ donc $\lambda_4 = 0$.
   Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\sin(x) + \lambda_2 x\sin(x) = 0$. Pour $x = \frac{\pi}{2}$ puis $x = -\frac{\pi}{2}$, on obtient alors $\begin{cases} \lambda_1 + \frac{\pi}{2}\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \frac{\pi}{2}\lambda_3 = 0 \end{cases}$.
   Donc $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.
   Donc $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = (0,0,0,0)$.
   La famille est donc libre.
10. Oui. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres réels deux à deux distincts tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$. On suppose, quitte à réindicer que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.
    Supposons que $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq (0,\ldots,0)$. Notons alors $n_0 = \max(i\in\{1,\ldots,n\} \mid \alpha_i \neq 0\}$.
    Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a donc $\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \mathrm{e}^{\alpha_i x} = 0$.
    Or $\alpha_{n_0} \neq 0$, donc
    $$\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \mathrm{e}^{\alpha_i x} \sim_{x\to+\infty} \alpha_{n_0}\mathrm{e}^{\alpha_{n_0} x}.$$
    Or $x \longmapsto \alpha_{n_0}\mathrm{e}^{\alpha_{n_0} x}$ est non nulle au voisinage de $+\infty$ tandis que $x \longmapsto \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \mathrm{e}^{\alpha_i x}$ l'est. Ceci est absurde.
    On pouvait aussi par exemple factoriser par $\mathrm{e}^{\alpha_{n_0} x}$ puis faire tendre x vers $+\infty$ pour obtenir que $\lambda_{n_0} = 0$ ce qui est absurde.
    Donc $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq (0,\ldots,0)$ et la famille $(f_{\alpha_1},\ldots,f_{\alpha_n})$ est libre.
    Toute sous-famille de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est donc libre, donc la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

11. Oui. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2(n^2)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_3(2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 n^2 + \lambda_3 2^n = 0$.

En particulier, pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, on obtient le système, $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$.

On en déduit que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$. Donc la famille est libre.
On aurait également pu regarder des équivalents, si $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 n^2 + \lambda_3 2^n \sim_{n\to+\infty} \lambda_3 2^n$ qui est non nul, ce qui est absurde, donc $\lambda_3 = 0$. De même, si $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 n^2 \sim \lambda_2 n^2$ qui est non nul, ce qui est absurde, donc $\lambda_2 = 0$, et finalement $\lambda_1 = 0$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On considère une famille libre de quatre vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :
   (a) $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
   (b) $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_3 + \vec{e}_4)$,
2. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que pour tout $\vec{a} \in E \setminus \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$, la famille $(\vec{e}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{e}_p + \vec{a})$ est libre.

---

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2 2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}_E$.
   Alors $\lambda_1\vec{e}_1 + (2\lambda_2)\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}_E$.

   La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ étant une famille libre de E (comme sous-famille d'une famille libre), on a $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$,

   donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$.
   La famille $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est donc libre.

   (b) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2(2\vec{e}_1 + \vec{e}_4) + \lambda_3(\vec{e}_3 + \vec{e}_4) = \vec{0}_E$.
   Alors $(\lambda_1 + 2\lambda_2)\vec{e}_1 + \lambda_3\vec{e}_3 + (\lambda_2 + \lambda_3)\vec{e}_4 = \vec{0}_E$.

   La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ étant libre (comme sous-famille d'une famille libre), on a $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$.

   Donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$.
   La famille $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_3 + \vec{e}_4)$ est libre.
2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1(\vec{e}_1 + \vec{a}) + \dots + \lambda_n(\vec{e}_n + \vec{a}) = \vec{0}_E$.
   Alors $\lambda_1\vec{e}_1 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\vec{a}$.
   Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$, alors $\vec{a} = \dfrac{-1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}(\lambda_1\vec{e}_1 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n) \in \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, ce qui est exclu.
   Donc $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$.
   Donc $\lambda_1\vec{e}_1 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0}_E$. La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ étant libre, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.
   Donc la famille $(\vec{e}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{e}_n + \vec{a})$ est libre.

Exercice 5. Déterminer une base de chacun des ensembles suivants, après avoir justifié que ce sont des espaces vectoriels :

1. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.
2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
3. $C = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$.

---

1. On a $A = \{(x, y, z, -x-y-z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.
   Donc $A = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$ et A est donc un sous-espace vectoriel, engendré par les vecteurs $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$ et $(0, 0, 1, -1)$. La famille $((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$ est donc génératrice de A.
   Vérifions que c'est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que
   $$\lambda_1(1, 0, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 0, -1) + \lambda_3(0, 0, 1, -1) = (0, 0, 0, 0).$$
   Alors $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$. Donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ et la famille est libre.
   Libre et génératrice, la famille $((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$ est donc une base de A.
   On peut en déduire que A est de dimension 3, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ de dimension 4.

2. On a $B = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\right)$. B est donc un sous-espace vectoriel engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\right)$, qui est donc une famille génératrice.
   Vérifions qu'elle est libre.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$\lambda_1 \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$
   Alors $\begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2\\-\lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, donc $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$. La famille est donc libre.
   Libre et génératrice, la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\right)$ est donc une base de B.
   On peut en déduire que B est de dimension 2, dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. P s'écrit sous la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   On a $P \in C$ si et seulement si $P(0) = 2P(1)$, soit si et seulement si $c = 2(a+b+c)$, soit si et seulement si $c = -2a-2b$.
   Donc $P \in C$ si et seulement si $P = aX^2 + bX - 2a - 2b$.
   Donc $C = \{a(X^2 - 2) + b(X - 2) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(X^2 - 2, X - 2)$.
   C est donc un sous-espace vectoriel engendré par $(X^2 - 2, X - 2)$, qui est donc une famille génératrice.
   Cette famille est libre car elle est de degrés échelonnés.
   La famille $(X^2 - 2, X - 2)$ est donc une base de C.
   On peut en déduire que C est de dimension 2, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3.

Exercice 6. Trouver une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, -1)$, $(3, -1, 2)$, $(4, 1, 1)$ et $(2, -3, 3)$.

Notons $\vec{u}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{u}_2 = (3, -1, 2)$, $\vec{u}_3 = (4, 1, 1)$ et $\vec{u}_4 = (2, -3, 3)$.

On a

$$\begin{aligned}\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) &= \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 - \vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_4 + \vec{u}_1 - \vec{u}_2)\\ &= \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{0}_E, \vec{0}_E)\\ &= \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2).\end{aligned}$$

La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est donc une famille génératrice et les deux vecteurs étant non colinéaires, c'est aussi une famille libre.

Une base du sous-espace vectoriel étudié est donc la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.