TD n°4 : Géométrie 2

Exercice 4.

1. a) $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (des réels) $\in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 \cdot \vec{e_1} + \lambda_2 \cdot 2\vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3} = \vec{0}$.

On sait que pour tout $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R}$,
si $\mu_1 \vec{e_1} + \mu_2 \vec{e_2} + \mu_3 \vec{e_3} + \mu_4 \vec{e_4} = \vec{0}$ alors $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$.

On a $\underbrace{\lambda_1}_{\mu_1} \vec{e_1} + \underbrace{(2\lambda_2)}_{\mu_2} \vec{e_2} + \underbrace{\lambda_3}_{\mu_3} \vec{e_3} + \underbrace{0}_{\mu_4} \vec{e_4} = \vec{0}$

Donc $\lambda_1 = 0$, $2\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$,
donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$.
Donc $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$ est libre.

b) $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_3} + \vec{e_4})$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{K}^3$ tel que
$$\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 (2\vec{e_1} + \vec{e_4}) + \lambda_3 (\vec{e_3} + \vec{e_4}) = \vec{0} \quad = 0\vec{e_1} + 0\vec{e_3} + 0\vec{e_4}$$
On a donc $(\lambda_1 + 2\lambda_2)\vec{e_1} + \lambda_3 \vec{e_3} + (\lambda_2 + \lambda_3)\vec{e_4} = \vec{0}$.

Comme $(\vec{e_1}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ est libre, on a
$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}, \quad \text{donc} \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
Donc la famille $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_3} + \vec{e_4})$ est libre.

2. $\vec{a} \notin \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$

Soient $(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$\lambda_1 (\vec{e_1} + \vec{a}) + \lambda_2 (\vec{e_2} + \vec{a}) + \cdots + \lambda_n (\vec{e_n} + \vec{a}) = \vec{0}$$

On a $\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \vec{a} = \vec{0}$. $(*)$

Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$

alors $\vec{a} = \dfrac{-1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} (\lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n}) \in \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots \vec{e_n})$

Absurde !

Donc $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$.

Donc $(*)$ s'écrit $\lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0}$

Comme $(\vec{e_1}, \dots \vec{e_n})$ est libre, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Donc $(\vec{e_1} + \vec{a}, \dots, \vec{e_n} + \vec{a})$ est libre.

Exercice 3

8. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\underbrace{\lambda_1 \, id + \lambda_2 \exp}_{f} = \underbrace{0_{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}}_{g}$,

où $0_{\mathbb{R} \to \mathbb{R}} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$.

$f = g$:

$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = g(x)$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 x + \lambda_2 \exp(x) = 0$.

Prenons $x = 0$, $\lambda_1 \times 0 + \lambda_2 e^0 = 0$, $\qquad id(x) = x$

donc $\lambda_2 = 0$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 x = 0$, donc $\lambda_1 = 0$

(par exemple pour $x = 1$)

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc $(id, \exp)$ est libre.

10. Montrons que $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Soit $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n})$ une sous-famille finie de $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$.

On suppose $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

Soit $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 f_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0_{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\lambda_1 f_{\alpha_1}(x) + \dots + \lambda_n f_{\alpha_n}(x) = 0$,

soit $\lambda_1 \exp(\alpha_1 x) + \dots + \lambda_n \exp(\alpha_n x) = 0$.

(Supposons que $\lambda_n \neq 0$.)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\lambda_1 \exp(\alpha_1 x) + \dots + \lambda_n \exp(\alpha_n x)}{\exp(\alpha_n x)} = 0$$

donc $\lambda_1 \exp(\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_n)}_{<0} x) + \dots + \lambda_{n-1} \exp(\underbrace{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)}_{<0} x) + \lambda_n = 0$.

En laissant tendre x vers $+\infty$, $\lambda_n = 0$.

De même, on obtient $\lambda_{n-1} = 0, \dots, \lambda_1 = 0$.

Donc $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n})$ est libre.

Donc $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

11. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{0}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

$$\underbrace{\lambda_1 (1)_{n \in \mathbb{N}} + \lambda_2 (n^2)_{n \in \mathbb{N}} + \lambda_3 (2^n)_{n \in \mathbb{N}}}_{(\lambda_1 \times 1 + \lambda_2 n^2 + \lambda_3 2^n)_{n \in \mathbb{N}}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$$

donc $(\underbrace{\lambda_1 + \lambda_3}_{u_0}, \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3}_{u_1}, \underbrace{\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3}_{u_2}, \dots) = (0, 0, 0 \dots)$

Donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$,

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille est libre.

<u>ou</u>, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_1 + \lambda_2 n^2 + \lambda_3 2^n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 + \lambda_2 n^2 + \lambda_3 2^n = 0$.

Si $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 n^2 + \lambda_3 2^n \underset{n \to +\infty}{\sim} \lambda_3 2^n \neq 0$

Or $\lambda_1 + \lambda_2 n^2 + \lambda_3 2^n = 0$.

Absurde. Donc $\lambda_3 = 0$.

Si $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda_2 n^2 \neq 0$, Absurde.

Donc $\lambda_2 = 0$.

Puis $\lambda_1 = 0$.

Exercice 1

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$, $\mathbb{R}^3$

① $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_3} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{x_3 - x_2} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

② $\text{Vect}\left(\left(\ \right),\left(\ \right),\left(\ \right)\right) \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit $\begin{cases} a = \lambda_2 + \lambda_3 \\ b = \lambda_1 + \lambda_3 \\ c = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$, donc $\begin{cases} \lambda_1 = \dots \\ \lambda_2 = \dots \\ \lambda_3 = \dots \end{cases}$ (en fonction de a, b et c)

Donc $\text{Vect}\left(\left(\ \right),\left(\ \right),\left(\ \right)\right) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

③ (Avec le cours n°5).

On montre que la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

Or c'est une famille de 3 vecteurs, dans un ev $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension $3 \times 1 = 3$, donc c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

<u>Exercice 2</u>

1. $(x, 2x, 3x) = x(1,2,3)$

$A = \{x(1,2,3), x \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}((1,2,3))$

3. $aX^2 + (b-2a)X + a - b + c$

$= a(X^2 - 2X) + b(X-1) + c$

$C = \{a(X^2-2X) + b(X-1) + c, \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}(X^2-2X, X-1, 1)$.

5. $\begin{pmatrix} a-b & a \\ -b & b+c \end{pmatrix}$

$= a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

$$S = \{ (-2\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2), \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$

1. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 (1,1,-1) + \lambda_2 (2,1,3) + \lambda_3 (0,-1,5) = (0,0,0).$$

On a donc $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ -\lambda_2 = \lambda_3 \\ \cancel{-2\lambda_3 - 3\lambda_3 + 5\lambda_3 = 0} \end{cases}$

Inutile.

En prenant $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$,

on a $\lambda_1 (1,1,-1) + \lambda_2 (2,1,3) + \lambda_3 (0,-1,5) = (0,0,0)$

et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$. Donc la famille est liée.

2. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 (1,1,0) + \lambda_2 (1,2,1) + \lambda_3 (2,3,2) = (0,0,0).$$

On a donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$, donc la famille est libre.

3. La famille est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires : ils sont non nuls et $X^2 \neq \lambda (X^2 + X + 2)$.

ou Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 (X^2 + X + 2) = 0$.

Donc $(\lambda_1 + \lambda_2) X^2 + \lambda_2 X + 2\lambda_2 = 0$.

Donc $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$, donc $\lambda_1 = 0$.

4. $X^2 - X + X^2 + X = 2X^2$, donc $X^2 = \frac{1}{2}(X^2 - X) + \frac{1}{2}(X^2 + X)$

donc la famille $(X^2, X^2 - X, X^2 + X)$ est liée.

ou $\underbrace{2}_{\lambda_1} \times X^2 \underbrace{-1}_{\lambda_2} (X^2 - X) \underbrace{-1}_{\lambda_3} \times (X^2 + X) = 0$, donc liée.

ou Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 (X^2 - X) + \lambda_3 (X^2 + X) = 0.$$

Donc $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) X^2 + (-\lambda_2 + \lambda_3) X = 0$,

donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases}$

En prenant, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = -2$.

Donc $-2X^2 + (X^2 - X) + (X^2 + X) = 0$. Donc ... est liée.

6. $\underbrace{-3}_{\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{-1}_{\lambda_2} \times \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc ... liée

ou Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \cancel{-2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0} \end{cases}$ donc $\lambda_1 = 3\lambda_2$.

En prenant $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 3$, on a $\lambda_1 (\quad) + \lambda_2 (\quad) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc la famille est liée.

7. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 & -2\lambda_2 + 6\lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 - 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

donc $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_2 = 3\lambda_3 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$ Donc la famille est libre.

Exercice 5

→ Commencer comme à l'ex 2.
→ Puis montrer que la famille génératrice obtenue est libre

$(x, y, z, t) \in A$ ssi $t = -x - y - z$

Donc $(x, y, z, t) = (x, y, z, -x - y - z)$