# II - Sous-espaces vectoriels

## 2. Sev engendré par une partie

$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$. Si $\vec{x}_1 \in F$ et $\vec{x}_2 \in F$ et $F$ est un sev,

alors $\mathrm{vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \subset F$.

$\left| \begin{array}{l} \vec{x}_1 \in \mathrm{vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ \vec{x}_2 \end{array} \right.$

$\vec{x} \in \mathrm{vect}(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n)$ ssi $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i$

$= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$.

Il existe $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\underbrace{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n}_{\text{nombre fini}}$ de la famille $(x_i)_{i \in I}$

$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$.

Prop 34. $C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i \ , (\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$.

Montrons que $C = \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n)$.

$\supset$ : $\vec{x}_i \in \underbrace{\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n)}_{\text{sev}}$ donc pour tout $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i \in \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n)$. Donc $C \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_n)$.

$\subset$ : 1) $\forall i \in \{1 \dots n\}$, $\vec{x}_i \in C$, $\vec{x}_i = 1 \vec{x}_i + \sum_{j \neq i} 0 \cdot \vec{x}_j$

Donc $\{x_1, \dots x_n\} \subset C$.

2) $C$ est un sev.

Or $\mathrm{Vect}(x_1, \dots x_n)$ est le plus petit sev contenant $\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n$.

Donc $\mathrm{Vect}(x_1, \dots x_n) \subset C$.

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i$ : si $n = 1$, $\lambda_1 \cdot \vec{x}_1$,

$\mathrm{Vect}(\vec{0}_E) = \{ \vec{0}_E, \lambda \in \mathbb{K} \} = \{ \vec{0}_E \}$.

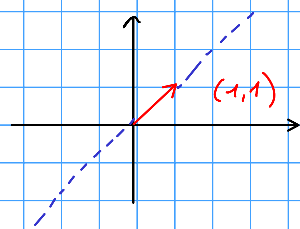
$2\mathbb{Z} = \{ 2n, n \in \mathbb{K} \}$.

$\vec{y} = \lambda_0 \vec{x}$ , $\vec{x} \neq \vec{0}$ , $\mathrm{Vect}(\vec{x},\vec{y}) = \{ \lambda.\vec{x} + \mu \vec{y} \ , \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \}$

$$= \{ \lambda.\vec{x} + \mu \lambda_0 \vec{x} \ , \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \}$$

$$= \{ \underbrace{(\lambda + \mu\lambda_0)}_{\lambda'}.\vec{x} \ , \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \}$$

$$= \{ \lambda'.\vec{x} \ , \ \lambda' \in \mathbb{K} \} = \mathbb{K}.\vec{x} \ .$$




$$\mathrm{Vect}(1, x, .. x^n) = \{ \lambda_1 . 1 + \lambda_2 X^1 + \dots + \lambda_{n+1} X^n \ , \ (\lambda_1, .. \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \}$$

$$= \mathbb{K}_n[X]$$

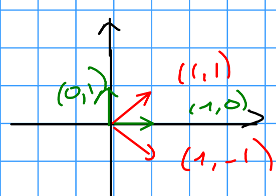
$$(\lambda+\mu, \lambda-\mu) = (\lambda,\lambda) + (\mu,-\mu) = \lambda(1,1) + \mu(1,-1)$$

$(x,y,z) \in H$ ssi $(x,y,z) = (x, 2x+3z, z)$

$$= x(1,2,0) + z(0,3,1)$$

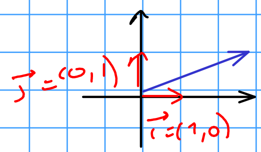
$$\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) = \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 + \underbrace{2\vec{x}_2 - \vec{x}_1 + 4\vec{x}_4}_{C.L.}, \vec{x}_4)$$

$$\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, .. \vec{x}_n) = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . \vec{x}_i \ , \ \lambda_i \in \mathbb{K} \} \ .$$



# III - Familles de vecteurs

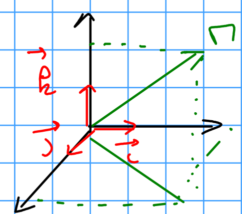
## 1 - Familles génératrices




$(x,y) = 3\vec{i} + \vec{j}$.  $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$.

$\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots X^n)$  $P = a_0 1 + a_1 X + \dots + a_{n+1} X^n$

$(\vec{x}, \dots \vec{x}_n)$ est génératrice de $E$ si pour tout $\vec{x} \in E$,
$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x_i}$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$.




$\vec{ei} = (\underbrace{0 \dots 0\, 1}_{i^e}\, 0 \dots 0)$

$\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{x} = (x_1, \dots x_n) = x_1(1,0\dots 0) + x_2(0,1,0,\dots 0)$
$+ \dots + x_n(0, \dots 0, 1)$

$z = \lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times i$  on prend $\lambda_1 = \mathrm{Re}(z)$, $\lambda_2 = \mathrm{Im}(z)$.
$\in \mathbb{R}$

$E = \mathrm{Vect}(\underbrace{x_1, \dots x_n}_{\text{famille génératrice}})$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x,y) = \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (1,-1)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)$$

Donc $\begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases}$. Donc $\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{x+y}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$.

## 2. Familles libres et liées.

Déf 44 : Libre :

$\forall (\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . \vec{x_i} = \vec{0} \quad \Rightarrow \forall i \in \{1..n\} \quad \lambda_i = 0$

(ou $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.)

Rédaction : Pour montrer que $(\vec{x_1}, \dots \vec{x_n})$ est libre :

Soit $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x_i} = \vec{0}$.

⋮

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc la famille est libre.

$(\vec{x}, \vec{y})$ est liée $\Leftrightarrow \vec{x} = \lambda \vec{y}$ ou $\vec{y} = \lambda \vec{x}$

$\Leftrightarrow \vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . \vec{e_i} = \lambda_1 (1, 0, \dots 0) + \lambda_2 (0, 1, 0, \dots 0) + \dots + \lambda_n (0, \dots, 0, 1)$

$= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

et $\vec{0}_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots 0)$.