4. Ev de dimension finie

3. Dimension

base de K^n : $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ où $\vec{e_i} = (0, \dots 0, \underset{i}{1}, 0 \dots 0)$

base de $K_n[X]$: $1, X, X^2, \dots X^n$ $\quad n+1$

$X^0, X^1 \dots X^n$

$\mathcal{M}_2(K)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\dim \mathcal{M}_2(K) = 4$.

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ (ensemble des matrices de taille $n \times p$ $\left(n \text{ lignes} \updownarrow \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \right)$, p colonnes)

$(E_{11}, E_{12}, \dots E_{1p}, E_{21}, \dots E_{2p}, \dots \dots, E_{n1} \dots E_{np})$

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\dim \mathcal{M}_{n,p}(K) = n \times p$, $\quad \dim \mathcal{M}_n(K) = n^2$.

Prop 69. On cherche une base de $E \times F$.

$m = \dim E$, $\quad n = \dim F$.

$(\vec{e_1}, \dots \vec{e_m})$ base de E et $(\vec{f_1}, \dots \vec{f_n})$ base de F.

Un vecteur de $E \times F$ s'écrit $(\vec{e}, \vec{f})$ avec $\vec{e} \in E$ et $\vec{f} \in F$.

$$\Big(\underbrace{\underbrace{(\vec{e_1}, \vec{0_F})}_{\in E \times F}, \dots, \underbrace{(\vec{e_m}, \vec{0_F})}_{\in E \times F}}_{m \text{ vecteurs}}, \underbrace{\underbrace{(\vec{0_E}, \vec{f_1})}_{\in E \times F}, \dots \underbrace{(\vec{0_E}, \vec{f_n})}_{\in E \times F}}_{n \text{ vecteurs}} \Big)$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum \lambda_i \cdot \vec{e_i}, \sum \mu_j \cdot \vec{f_j} \right) = \left(\sum \lambda_i \vec{e_i}, \vec{0_F} \right) + \left(\vec{0_E}, \sum \mu_j \vec{f_j} \right)$$
$$= \sum \lambda_i (\vec{e_i}, \vec{0_F}) + \sum \mu_j (\vec{0_E}, \vec{f_j})$$

$\sum \lambda_i \vec{x_i} = \vec{0}$

$(\vec{e_i}, \vec{0_F})$ ou $(\vec{0_E}, \vec{f_j})$

4. Caractérisation en dim finie.

$\lambda_1 = -2\lambda_3$

$4\lambda_3 = \lambda_2$

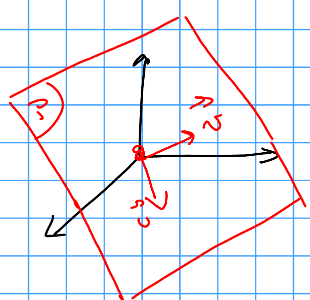
$8\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \qquad \lambda_3 = 0$

$\dim \mathbb{R}_3[X] = 3 + \underline{\underline{1}} = 4$

GEOM 2 — Chap 1. Espaces vectoriels — Cours 5 (2)

4. Ev de dimension finie

5. Dimension d'un sev



$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\dim P = 2 \qquad P = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$

$$G = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}}\Big) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

$(\vec{x})$ est génératrice et libre (car $\vec{x} \neq \vec{0}$), c'est donc une base

$\dim G = 1$.

$2x - y + 3z = 0 \iff y = 2x + 3z$

$H = \{ (x, 2x+3z, z),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ x(1,2,0) + z(0,3,1),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \mathrm{Vect}((1,2,0),(0,3,1))$

On vérifie que la famille est libre.

$\dim H = 2$.

6. Rang d'une famille de vecteurs

$$rg(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \dim(\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = 2$$

$$rg(1, X, X^2, X^3) = \dim(\text{Vect}(1, X, X^2, X^3)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$$

$$rg(X, 2X, 4X) = \dim(\text{Vect}(X, 2X, 4X)) = 1$$

$$\text{Vect}(X, 2X, 4X) = \text{Vect}(X, \cancel{X}, \cancel{X}) = \text{Vect}(X)$$

7. Matrice d'une famille de vecteurs.

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\underset{\in E}{\vec{x}_1}, \dots \underset{\in E}{\vec{x}_p}) = A$$

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{x}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n \\ \vdots \\ \vec{x}_p = a_{1p}\vec{e}_1 + \dots + a_{np}\vec{e}_n \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{coord de } \vec{x}_1 & \text{coord de } \vec{x}_2 & & \text{coord de } \vec{x}_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \vec{e}_1 \\ \leftarrow \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \vec{e}_n \end{array} \end{array} \quad n \text{ lignes}$$

p colonnes

Les coordonnées de x_1 sont $(a_{11}, \dots a_{n1})$

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots \lambda_n \vec{e}_n$$

Les coordonnées : $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$$\vec{x}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - 1\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \dots, \quad \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1).$$

$\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$.

$1 + X = 1 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2$ $\quad (1, 1, 0)$

$X + 2X^2 = 0 \times 1 + 1 \times X + 2 \times X^2$ $\quad (0, 1, 2)$

$$\mathcal{B}' = (X^2, X, 1) \neq \mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(1 + X, X + 2X^2, -1 - X + X^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow X^2 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow 1 \end{array}$$

$1 + X = 0 \times X^2 + 1 \times X + 1 \times 1 \quad : \quad (0, 1, 1)$