Géométrie 2

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

10 mars 2021

Table des matières

Chapitre 1 Espaces vectoriels

De nombreux problèmes de mathématiques ou de physique vérifient la propriété suivante : si u et v sont deux solutions d'un problème alors $u+v$ est aussi solution de ce problème, ainsi que ku, k étant un nombre réel ou complexe. Ces problèmes sont dit linéaires et sont souvent plus faciles à résoudre que les problèmes plus généraux, dits non linéaires. Ce chapitre est le premier chapitre d'algèbre linéaire.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les résultats présentés demeurent vrais sur un corps quelconque.

1.1 Structure d'espace vectoriel

1.1.1 Premières définitions

Définition 1
*On appelle **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ \域$\mathbb{K}$上的线性空间 / 向量空间\, ou $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**, tout triplet $(E,+,\cdot)$ où E est un ensemble et*

- $+$ *est une loi de composition interne sur E :* $E \times E \longrightarrow E$; $(\vec{x},\vec{y}) \longmapsto \vec{x}+\vec{y}$,
- $\cdot$ *est une loi de composition externe de $\mathbb{K}$ sur E :* $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$; $(\lambda,\vec{x}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{x}$,

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(E,+)$ *est un groupe abélien,*
2. *pour tout* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ *et tout* $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$,
   (a) $\lambda \cdot (\vec{x}+\vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$,
   (b) $(\lambda+\mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$,
   (c) $(\lambda\mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$,
   (d) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Remarque 2 — *Souvent, on parle du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à la place du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précise pas nécessairement le corps $\mathbb{K}$.*

Définition 3
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- *Les éléments de l'espace vectoriel E sont appelés les **vecteurs** \向量\.*
- *Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires** \标量\.*
- *La loi $+$ est appelée **addition**.*
- *La loi $\cdot$ est appelée **multiplication par un scalaire**.*
- *L'élément neutre du groupe $(E,+)$ est noté $\vec{0}_E$ ou $\vec{0}$ et est appelé le **vecteur nul** de E.*

Il ne faut pas confondre le vecteur nul $\vec{0}_E$ de E et le scalaire nul 0 de $\mathbb{K}$.

Remarque 4 — *La notation $\lambda \cdot \vec{x}$ est souvent remplacée par $\lambda\vec{x}$. Mais on n'écrit pas $\vec{x}\lambda$. Les flèches sur les vecteurs de E sont également souvent omises : on note x à la place de $\vec{x}$.*

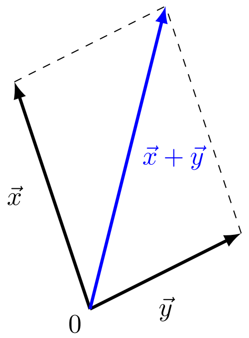
Les règles que nous venons de définir sont celles que l'on connait déjà sur les vecteurs du plan et de l'espace : en considérant deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, on peut

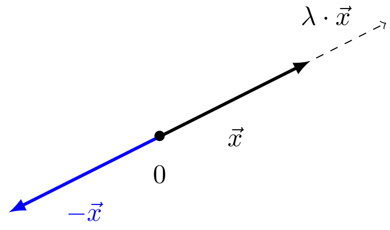
- sommer ces vecteurs : $\vec{x}+\vec{y}$,
- faire la différence de ces vecteurs : $\vec{x}-\vec{y}$,

- multiplier $\vec{x}$ par un scalaire λ : $\lambda \cdot \vec{x}$,
- calculer des expressions de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i$, où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\vec{x}_i \in E$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Par contre, la multiplication de deux vecteurs n'est pas définie.

Nous pourrons nous représenter les espaces vectoriels à l'aide d'un modèle géométrique qui pourra nous aider à visualiser les problèmes. Il faudra alors considérer des vecteurs ayant tous la même origine, ce point jouant le rôle du vecteur nul.





1.1.2 Premiers exemples fondamentaux

Nous donnons des exemples fondamentaux d'espaces vectoriels. Les vérifications sont faciles mais longues.

1.1.2.a. L'ensemble $\mathbb{K}^n$

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ des lois suivantes :

Pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et tout $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ éléments de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$*$ $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$,

$*$ $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Alors $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Preuve —

1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien, donc $(\mathbb{R}^n, +)$ l'est aussi.
2. (a) Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ des éléments de $\mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) &= \lambda \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n))\\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n)\\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n)\\ &= \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}.\end{aligned}$$
   (b) Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} &= ((\lambda + \mu)x_1, \dots, (\lambda + \mu)x_n)\\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n)\\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \dots, \mu x_n)\\ &= \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}.\end{aligned}$$
   (c) Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et λ et μ des éléments de $\mathbb{R}$. On a
   $(\lambda\mu) \cdot \vec{x} = ((\lambda\mu)x_1, \dots, (\lambda\mu)x_n) = (\lambda(\mu x_1), \dots, \lambda(\mu x_n)) = \lambda \cdot (\mu x_1, \dots, \mu x_n) = \lambda \cdot (\mu \cdot (x_1, \dots, x_n)) = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$,
   (d) Soit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a $1 \cdot \vec{x} = (1x_1, \dots, 1x_n) = (x_1, \dots, x_n) = \vec{x}$.

$\square$

Notons qu'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est $\vec{0}_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$.

En particulier, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un vecteur est alors un réel et $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \times x$, multiplication entre deux réels.

On retrouve les vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ et les vecteurs de l'espace avec $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5 — *Dans* $\mathbb{R}^3$, $(1,2,0)+2\cdot(0,1,1)=(1,4,2)$.

• De même, $(\mathbb{C}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En particulier, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les vecteurs sont les nombres complexes et les scalaires sont les nombres réels. On a $\lambda\cdot\vec{x}=\lambda\times x$, multiplication entre un réel et un complexe.

Remarque 6 — *Plus généralement, tout espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *est aussi un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

1.1.2.b. L'ensemble des polynômes

• Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $E=\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ des lois suivantes :

Pour tout $P=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ et $Q=b_0+b_1X+\ldots+b_nX^n$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

* $P+Q=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\ldots+(a_n+b_n)X^n$,
* $\lambda\cdot P=\lambda a_0+\lambda a_1X+\ldots+\lambda a_nX^n$.

Alors $(\mathbb{R}_n[X],+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Preuve — Exercice. □

Notons qu'un vecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme P qui s'écrit sous la forme $P=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$, où pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, $a_i\in\mathbb{R}$.

Le vecteur nul de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\vec{0}_{\mathbb{R}^n[X]}=0$, le polynôme nul.

• De même $(\mathbb{C}_n[X],+,\cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

• Plus généralement, $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $+$ et $\cdot$ sont les opérations usuelles sur les polynômes.

Exemple 7 — *Dans* $\mathbb{R}_2[X]$, $1+X+X^2-2(X-X^2)=1-X+3X^2$.

1.1.2.c. L'ensemble des matrices

• Soit $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ des lois suivantes :

Pour tout $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et tout $B=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$ éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$,

* $A+B=\begin{pmatrix}a+a'&b+b'\\c+c'&d+d'\end{pmatrix}$,
* $\lambda\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b\\\lambda c&\lambda d\end{pmatrix}$.

Alors $(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve — Exercice. □

Notons qu'un vecteur de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est une matrice $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

Le vecteur nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est $\vec{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Exemple 8 — *Dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

• Plus généralement, pour tout $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (voir cours d'algèbre 2), où $+$ et $\cdot$ sont les opérations usuelles sur les matrices.

1.1.2.d. L'ensemble des suites

Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des lois suivantes :

Pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de $\mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $*$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $*$ $\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve — Exercice. □

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle $(0)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.1.2.e. Le produit d'espaces vectoriels

Soient E_1, …, E_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Posons $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, le produit cartésien de E_1, …, E_n. On munit E des lois suivantes :

Pour tout $\vec{x} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ et tout $\vec{y} = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ éléments de E et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $*$ $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \ldots, \vec{x}_n + \vec{y}_n)$,
- $*$ $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot \vec{x}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{x}_n)$.

Alors $(E_1 \times \ldots \times E_n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On l'appelle l'**espace vectoriel produit** \积空间\.

Preuve —La preuve est proche de celle faite pour $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$. Vérifions seulement deux points de la définition.

- Pour tout $\vec{x} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E$, $1 \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = (1 \cdot \vec{x}_1, \ldots, 1 \cdot \vec{x}_n) = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \vec{x}$.
- Pour tout $\vec{x} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ et $\vec{y} = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ éléments de E, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) &= \lambda \cdot (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \ldots, \vec{x}_n + \vec{y}_n) \\
&= (\lambda \cdot (\vec{x}_1 + \vec{y}_1), \ldots, \lambda \cdot (\vec{x}_n + \vec{y}_n)) \\
&= (\lambda \cdot \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{y}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{x}_n + \lambda \cdot \vec{y}_n) \\
&= (\lambda \cdot \vec{x}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{x}_n) + (\lambda \cdot \vec{y}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{y}_n) \\
&= \lambda \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) + \lambda \cdot (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n) \\
&= \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}.
\end{aligned}$$

□

Le vecteur nul de $E_1 \times \ldots E_n$ est $\vec{0}_{E_1\times\ldots\times E_n} = (\vec{0}_{E_1}, \ldots, \vec{0}_{E_n})$.

Remarque 9 — *Ainsi, on retrouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .*

1.1.2.f. L'ensemble des applications de X dans E

Soient X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On munit l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E des lois suivantes :

Pour tout f et tout g éléments de $\mathcal{F}(X, E)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $*$ $f + g$ est l'application de X dans E définie, pour tout $x \in X$, par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

- $*$ $\lambda \cdot f$ est l'application de X dans E définie, pour tout $x \in X$, par

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x)) \,.$$

Alors $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve — Démontrons seulement deux points de la définition.

Soient f et g des éléments de $\mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On a $1 \cdot f = f$. En effet, pour tout $x \in X$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot (f(x)) = f(x)$.

- On a $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$. En effet, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot (f+g))(x) &= \lambda \cdot ((f+g)(x))\\ &= \lambda \cdot (f(x)+g(x))\\ &= \lambda \cdot (f(x)) + \lambda \cdot (g(x))\\ &= (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x)\\ &= (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(x).\end{aligned}$$

□

Le vecteur nul de $\mathcal{F}(X,E)$, $\vec{0}_{\mathcal{F}(X,E)}$, est l'application nulle : $X \longrightarrow E$; $x \longmapsto \vec{0}_E$.

Exemple 10 — *Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et leur multiplication par un réel. Il s'agit du cas particulier où $X = I$ et $E = \mathbb{R}$.*

Exemple 11 — *Prenons $X = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Soient f et g éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par*

$$f(x) = (1+x, x^2) \quad \textit{et} \quad g(x) = (\exp(x), -x).$$

Alors $f+g$ est l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$(f+g)(x) = (x+1+\exp(x), x^2 - x).$$

Remarque 12 — *On retrouve que l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des suites et leur multiplication par un élément de $\mathbb{K}$.*

1.1.3 Quelques règles de calcul

Proposition 13
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tout $\vec{x} \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
- $\lambda \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$,
- $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$ *si et seulement si* $\lambda = 0$ *ou* $\vec{x} = \vec{0}_E$.
- $\overrightarrow{-x} = (-1) \cdot \vec{x}$, *où* $\overrightarrow{-x}$ *est l'opposé de* $\vec{x}$ *dans le groupe* $(E,+)$ *et* -1 *est l'opposé de* 1 *dans le groupe* $(\mathbb{K},+)$.

Preuve — Soient $\vec{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On a $0 \cdot \vec{x} = (0+0) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$.
  Donc, par simplification dans le groupe $(E,+)$, $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
- On a $\lambda \cdot \vec{0}_E = \lambda \cdot (\vec{0}_E + \vec{0}_E) = \lambda \cdot \vec{0}_E + \lambda \cdot \vec{0}_E$.
  Donc, par simplification dans le groupe $(E,+)$, $\lambda \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$.
- D'après les points précédents, si $\lambda = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}_E$ alors $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
  Réciproquement, supposons que $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
  1$^{\text{er}}$ cas : $\lambda = 0$.
  2$^{\text{nd}}$ cas : $\lambda \neq 0$. Alors $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \left(\dfrac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot x = \dfrac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \vec{0}_E = \overrightarrow{0}_E$.
  D'où le résultat.
- On a $\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = (1-1) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$.
  Donc $\overrightarrow{-x} = (-1) \cdot \vec{x}$.

□

Proposition 14
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- *Pour tout $\vec{x} \in E$ et tous λ_1, …, λ_n éléments de $\mathbb{K}$,*

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot \vec{x}.$$

- *Pour tous $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ éléments de E, et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot \vec{x}_i) = \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i \right).$$

Preuve — Ces deux propriétés se démontrent par récurrence en utilisant les points suivants de la définition d'un espace vectoriel :

- $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x} = (\lambda + \mu) \cdot \vec{x}$,
- $\lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y} = \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y})$.

□

1.1.4 Combinaisons linéaires

Définition 15
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ des éléments de E. Soit $\vec{x} \in E$.

*On dit que $\vec{x}$ est **combinaison linéaire** \线性组合\ des vecteurs $\vec{x}_1$, ..., $\vec{x}_n$ si $\vec{x}$ s'écrit sous la forme*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n,$$

où λ_1, ..., λ_n sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Remarques 16

- *Une combinaison linéaire d'un seul vecteur $\vec{x}$ est donc un vecteur de la forme $\lambda \cdot \vec{x}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.*
- *Une combinaison linéaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est donc un vecteur de la forme $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.*

Exemples 17

- *Dans $\mathbb{R}_3[X]$, le polynôme $2 + X - 3X^3$ est, par exemple, combinaison linéaire des polynômes 1, X et X^3 avec $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -3$.*
- *Plus généralement, tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire des polynômes 1, X, ..., X^n.*
- *Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $(2, 7)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(5, -2)$ et $(1, -3)$:*

$$(2, 7) = (5, -2) - 3(1, -3).$$

Pour trouver cette combinaison linéaire, on cherche des réels λ et μ tels que

$$(2, 7) = \lambda(5, -2) + \mu(1, -3).$$

Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} 2 = 5\lambda + \mu \\ 7 = -2\lambda - 3\mu \end{cases}.$$

- *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*
En effet, M est combinaison linéaire de ces matrices si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$, soit encore si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

soit finalement, si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ -\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Or ce système n'admet pas de solutions. D'où le résultat.

En général, l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \vec{x}_i$ n'implique pas que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = \mu_i$.

Exemple 18 — *Dans* $\mathbb{R}^2$*, le vecteur* $(3,3)$ *peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs* $(1,1)$, $(0,1)$ *et* $(1,0)$ *mais il n'y a pas unicité des* λ_i *:*

$$\begin{aligned} (3,3) &= 1 \cdot (1,1) + 2 \cdot (0,1) + 2 \cdot (1,0) \\ &= 2 \cdot (1,1) + 1 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0). \end{aligned}$$

Définition 19
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ *une famille d'éléments de* E *indicée par* I*. Soit* $\vec{x} \in E$*. On dit que* $\vec{x}$ *est* ***combinaison linéaire*** *de la famille* $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ *si* $\vec{x}$ *est combinaison linéaire d'une sous-famille* ***finie*** $(\vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_p})$*, c'est-à-dire* $\vec{x}$ *s'écrit sous la forme*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{i_p} \cdot \vec{x}_{i_p},$$

où $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p} \in \mathbb{K}$.

Exemple 20 — *Tout polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *est combinaison linéaire finie de la famille* $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.2 Sous-espace vectoriel

Dans cette partie, $(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2.1 Définition

Définition 21
Soit F *une partie non vide de* E*. On dit que* F *est un* ***sous-espace vectoriel de*** E \子空\ *si* F *est stable par les lois* $+$ *et* $\cdot$ *(c'est-à-dire,* $F + F \subset F$ *et* $\mathbb{K} \cdot F \subset F$*) et si* F *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois* $+$ *et* $\cdot$ *induites sur* F*.*

Remarque 22 — *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* E *alors* F *est un sous-groupe de* $(E,+)$*, donc* $\vec{0}_F = \vec{0}_E \in F$*. Un sous-espace vectoriel contient donc toujours le vecteur nul.*

Exemple 23 — *Les ensembles* $\{\vec{0}_E\}$ *et* E *sont des sous-espaces vectoriels de* E*, dits* ***triviaux****.*

Le résultat suivant est celui que l'on utilise majoritairement pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E. Il évite de vérifier les nombreux points de la définition d'un espace vectoriel.

Proposition 24 (Caractérisation)
Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F \subset E$,
2. $\vec{0}_E \in F$,
3. *F est stable par combinaison linéaire* \对线性组合是封闭的\ *: pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,*
$$\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F.$$

Preuve — ▷ Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Alors, par définition $F \subset E$.

D'après la remarque précédente, F étant un sous-groupe de $(E, +)$, $\vec{0}_E \in F$.

Soient $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. F étant stable par la loi $\cdot$, $\lambda \cdot \vec{x} \in F$. F étant stable par la loi $+$, $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$.

D'où les trois points de la caractérisation.

◁ Réciproquement, supposons les points 1, 2 et 3 vérifiés.

F est une partie non vide de E puisque $F \subset E$ et $\vec{0}_E \in F$. Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$, $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y} \in F$ d'après le point 3. Donc F est un sous-groupe de $(E, +)$. $(E, +)$ étant commutatif, $(F, +)$ l'est aussi.

Les autres points de la définition d'un espace vectoriel sont vérifiés car ils le sont pour les éléments de E donc *a fortiori* pour les éléments de F.

D'où le résultat. □

Remarque 25 — *Pour montrer qu'un ensemble F muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, on peut montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu (voir les exemples de la partie 1.1.2). On prendra garde à ne pas oublier de préciser quel est cet espace vectoriel plus grand.*

Remarque 26 — *Le point 3 peut être séparé en deux points :*

3.1. Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$, $\vec{x} + \vec{y} \in F$

3.2. Pour tout $\vec{x} \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot \vec{x} \in F$.

Preuve — ▷ Supposons que pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$.

Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$. Alors $\vec{x} + \vec{y} = 1 \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$.

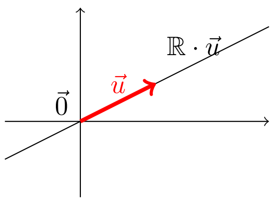
Soient $\vec{x} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \vec{0}_E \in E$ puisque $\vec{0}_E \in F$.

◁ Réciproquement, supposons les deux points vérifiés. Soient $(\vec{x}, \vec{y}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \cdot \vec{x} \in F$. Puis comme $(\lambda \cdot \vec{x}, \vec{y}) \in F^2$, $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in F$

D'où le résultat. □

Exemples 27

- *Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathbb{R} \cdot \vec{u} = \{\lambda \cdot \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, appelé la **droite vectorielle engendrée par** $\vec{u}$.*
  Preuve —
  1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ donc $\mathbb{R} \cdot \vec{u} \subset \mathbb{R}^2$.*
  2. $\vec{0}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) = 0 \cdot \vec{u} \in \mathbb{R} \cdot \vec{u}$.
  3. *Soient $(\vec{x}, \vec{y})$ des éléments de $\mathbb{R} \cdot \vec{u}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
  Comme $\vec{x} \in \mathbb{R} \cdot \vec{u}$, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{u}$.
  Comme $\vec{y} \in \mathbb{R} \cdot \vec{u}$, il existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{y} = \lambda_2 \cdot \vec{u}$.
  Donc
  $$\begin{aligned}\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} &= \lambda \cdot (\lambda_1 \cdot \vec{u}) + \lambda_2 \cdot \vec{u} \\ &= (\lambda\lambda_1) \cdot \vec{u} + \lambda_2 \cdot \vec{u} \\ &= (\lambda\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{u}.\end{aligned}$$
  Donc $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R} \cdot \vec{u}$.



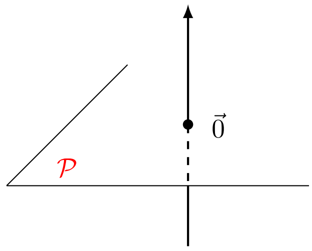
  De ces trois points, on en déduit que $\mathbb{R} \cdot \vec{u}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. □
  En particulier, toute droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0, 0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- *Soient a, b et c trois réels. Le plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax+by+cz=0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$.*

  ***Preuve** —*
  1. *$\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^3$.*
  2. *$\vec{0}_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\in\mathcal{P}$ car $a\times 0+b\times 0+c\times 0=0$.*
  3. *Soient (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2) des éléments de $\mathcal{P}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.*
     On sait que $ax_1+by_1+cz_1=0$ et $ax_2+by_2+cz_2=0$ car (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2) appartiennent au plan $\mathcal{P}$.
     Vérifions que $\lambda\cdot(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(\lambda x_1+x_2,\lambda x_2+y_2,\lambda x_3+y_3)\in\mathcal{P}$.
     On a
     $$\begin{aligned} a(\lambda x_1+x_2)+b(\lambda y_1+y_2)+c(\lambda z_1+z_2) &= a\lambda x_1+ax_2+b\lambda y_1+by_2+c\lambda z_1+cz_2\\ &=\lambda(ax_1+by_1+cz_1)+(ax_2+by_2+cz_2)\\ &=\lambda\times 0+0\\ &=0. \end{aligned}$$
     Donc $\lambda\cdot(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\in\mathcal{P}$.

  De ces trois points, il vient que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. □

  En particulier, tout plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- *$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.*

  ***Preuve** —*
  1. *$\mathbb{R}_n[X]\subset\mathbb{R}[X]$.*
  2. *$0\in\mathbb{R}_n[X]$ car $\deg(0)=-\infty\le n$.*
  3. *Soient P et Q des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.*
     Alors $\lambda P+Q$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n car $\deg(\lambda P+Q)\le\max\{\deg(P),\deg(Q)\}\le n$ puisque $\deg(P\le n$ et $\deg(Q)\le n$. Donc $\lambda P+Q\in\mathbb{R}_n[X]$.

  De ces trois points, il vient que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. □

- *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.*

  ***Preuve** —*
  1. *$\mathcal{C}(I,\mathbb{R})\subset\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.*
  2. *La fonction nulle $I\longrightarrow\mathbb{R}$; $x\longmapsto 0$ est continue donc appartient à $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.*
  3. *Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.*
     Alors, par somme et produit de fonctions continues, $\lambda f+g$ est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, donc $\lambda f+g\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

  De ces trois points, il vient que $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. □

  De même, les ensembles $\mathcal{D}(I,\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.

- *L'ensemble $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xy=0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

  ***Preuve** — F est un bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ qui contient le vecteur nul puisque $0\times 0=0$. Mais $(1,0,0)\in F$ et $(0,1,0)\in F$ puisque $1\times 0=0$ et $0\times 1=0$, et $(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)\notin F$ puisque $1\times 1=1\neq 0$ donc F n'est pas stable par combinaison linéaire. Le point 3. de la caractérisation n'est donc pas vérifié. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.* □

PROPOSITION 28

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I}E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve —
1. Pour tout $i\in I$, $E_i\subset E$ donc $\bigcap_{i\in I}E_i\subset E$.
2. Pour tout $i\in I$, $\vec{0}_E\in E_i$ car E_i est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\vec{0}_E\in\bigcap_{i\in I}E_i$.

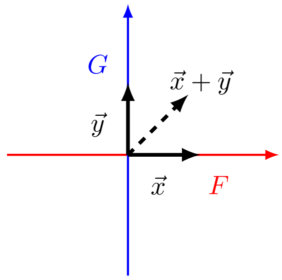
3. Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de $\bigcap_{i\in I} E_i$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
   Soit $i_0 \in I$. Les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ appartiennent à E_{i_0}. E_{i_0} étant un sous-espace vectoriel de E, d'après la caractérisation, $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in E_{i_0}$.
   i_0 étant quelconque, $\lambda \cdot \vec{x} + \vec{y} \in \bigcap_{i\in I} E_i$.

De ces trois points, on a le résultat. □

La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général car il n'est pas stable par addition. Voyons sur un exemple.

Exemple 29 —

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Considérons F la droite vectorielle engendrée par $\vec{x} = (1,0)$ et G la droite vectorielle engendrée par $\vec{y} = (0,1)$.
On a $\vec{x} \in F$ donc $\vec{x} \in F \cup G$.
On a $\vec{y} \in G$ donc $\vec{y} \in F \cup G$.
Mais $\vec{x} + \vec{y} = (1,0) + (0,1) = (1,1) \notin F \cup G$.



Remarque 30 — *Le complémentaire $E \setminus F$ d'un sous-espace vectoriel F n'est pas un sous-espace vectoriel de E : $E \setminus F$ ne contient pas $\vec{0}_E$ puisque $\vec{0}_E \in F$.*

Proposition 31
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Toute combinaison linéaire d'éléments $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ de F est élément de F.

Preuve — Ce résultat se démontre par récurrence en utilisant que F est stable par combinaison linéaire. □

1.2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 32
*Soit X une partie de E. Le **sous-espace vectoriel engendré par** X est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X (au sens de l'inclusion). Il est noté* $\mathrm{Vect}(X)$.

Preuve — Justifions l'existence du plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X. E est un sous-espace vectoriel de E contenant X. Considérons alors l'intersection F de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X. F est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels et F contient X puisque F est l'intersections de parties contenant X. Donc F est un sous-espace vectoriel de E contenant X.

Montrons que F est le plus petit au sens de l'inclusion. Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant X. Alors par définition de F, $F \subset H$. Donc F est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X. □

Remarques 33

- *Dans le cas d'un nombre fini de vecteurs avec $X = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$,* $\mathrm{Vect}(X)$ *se note souvent* $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ *et on parle du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.*
- *Plus généralement, si $X = \{\vec{x}_i \mid i \in I\}$,* $\mathrm{Vect}(X)$ *se note souvent* $\mathrm{Vect}((\vec{x}_i)_{i\in I})$.

Proposition 34

- *Soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille d'éléments de E. Alors* $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$.*
  Autrement dit, $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$.
- *Plus généralement, soient $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E indicée par I. Alors* $\mathrm{Vect}((\vec{x}_i)_{i\in I})$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) de la famille $(\vec{x}_i)_{i\in I}$.*

Preuve — Traitons le premier point, le deuxième se traite de la même manière.

Notons $C = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$, l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$.. Montrons, par double inclusions que $C = \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

▷ $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ contient les éléments $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$. Or $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ contient les combinaisons linéaires des éléments $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$. Donc $C \subset \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

◁ Réciproquement, montrons que $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \subset C$. Pour cela, montrons que C est un sous-espace vectoriel contenant les éléments $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$.

1. On a $C \subset E$ puisque les $\vec{x}_i$ sont éléments de E et E est un espace vectoriel.
2. $\vec{0}_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \vec{x}_i$ donc $\vec{0}_E \in C$.
3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des éléments de C et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda \cdot \vec{u} + \vec{v} \in C$.
   Comme $\vec{u} \in C$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i$.
   Comme $\vec{v} \in C$, il existe $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ telle que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \vec{x}_i$.
   Donc
   $$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{u} + \vec{v} &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \vec{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i + \mu_i) \cdot \vec{x}_i. \end{aligned}$$
   Donc $\lambda \cdot \vec{u} + \vec{v} \in C$.

De ces trois points, il vient que C est un sous-espace vectoriel de E.

De plus, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\vec{x}_j = 1 \cdot \vec{x}_j + \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i \neq j}} 0 \cdot \vec{x}_i$ donc $\vec{x}_j \in C$. Donc C contient les éléments $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$.

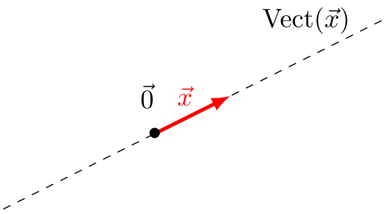
Par définition, $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ étant le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les éléments x_i, on en déduit que $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \subset C$.

Finalement, $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = C$. □

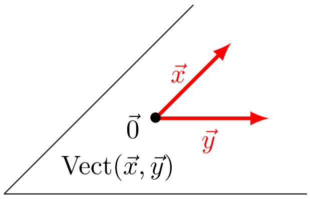
Remarque 35 — *Cela signifie que $\vec{x} \in \mathrm{Vect}(X)$ si et seulement s'il existe $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ éléments de X et λ_1, …, λ_n éléments de $\mathbb{K}$ tels que*
$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.$$

Exemples 36

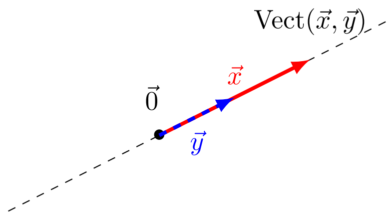
- *Soit $\vec{x}$ un élément de E. Alors*
  $$\mathrm{Vect}(\vec{x}) = \{\lambda \cdot \vec{x} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$
  Si $\vec{x} = \vec{0}_E$ alors $\mathrm{Vect}(\vec{x}) = \{\vec{0}_E\}$
  *Sinon, $\mathrm{Vect}(\vec{x}) = \mathbb{K} \cdot \vec{x}$ est la **droite vectorielle engendrée par** $\vec{x}$.*



- *Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de E. Alors*
  $$\mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) = \{\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}.$$
  *Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ne sont pas colinéaires, $\mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$ est le **plan vectoriel engendré par** $\vec{x}$ **et** $\vec{y}$.*



*Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont **colinéaires** \共线\ (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{y} = \lambda \cdot \vec{x}$ ou $\vec{x} = \lambda \cdot \vec{y}$) avec $\vec{x} \neq \vec{0}_E$, $\mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbb{K} \cdot \vec{x}$ est la droite vectorielle engendrée par $\vec{x}$.*



Exemples 37

- $\mathrm{Vect}(\vec{0}_E) = \vec{0}_E$.
- *Dans $\mathbb{R}^2$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}((1,1))$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ et passant par $(0,0)$:*

$$\mathrm{Vect}((1,1)) = \{\lambda(1,1) \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- *Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $\vec{x} = (1,1,0)$ et $\vec{y} = (-1,0,3)$. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{x}$ et $\vec{y}$:*

$$\mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) = \{\lambda(1,1,0) + \mu(-1,0,3) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{(\lambda - \mu, \lambda, 3\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- *On a $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ et $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}((X^n)_{n \in \mathbb{N}})$.*
- *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$,*

$$\mathrm{Vect}(1) = \{\lambda \times 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

  et

$$\mathrm{Vect}(1, i) = \{\lambda \times 1 + \mu \times i \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{C}.$$

- *Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$,*

$$\mathrm{Vect}(1) = \{\lambda \times 1 \mid \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}.$$

Pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de E, on peut montrer qu'il est engendré par une famille de vecteurs de E. C'est parfois pratique, comme sur les exemples suivants.

Exemples 38

- *Soit $F = \{(\lambda + \mu, \lambda - \mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. On a*

$$F = \{\lambda(1,1) + \mu(1,-1) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,1),(1,-1)),$$

  donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, engendré par les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$.
- *Soit $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$. On a*

$$G = \left\{a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

  donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- *Soit $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$.*
  Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimons y en fonction de x et z. On a $(x,y,z) \in H$ si et seulement si $y = 2x + 3z$. Donc

$$H = \{(x, 2x+3z, z) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,2,0) + z(0,3,1) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,2,0),(0,3,1)).$$

  Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, engendré par les vecteurs $(1,2,0)$ et $(0,3,1)$.

Proposition 39
Soient $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ *une famille d'éléments de* E. *On considère les opérations suivantes :*

- *éliminer les vecteurs nuls de la famille.*
- *éliminer un des vecteurs de la famille s'il est égal à un autre,*
- *permuter des vecteurs,*
- *multiplier un vecteur par un scalaire non nul,*
- *ajouter à l'un des vecteurs* $\vec{x}_{i_0}$ *une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille :*

$$\vec{x}_{i_0} + \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ i \neq i_0}} \lambda_i \cdot \vec{x}_i,$$

L'espace vectoriel engendré par la famille obtenue par ces opérations est encore égal à $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

Exemple 40 — *(Reprenons l'ensemble* F *des exemples 38. On a vu que* $F = \mathrm{Vect}\big((1,1),(1,-1)\big)$.
Par opérations sur la famille $\big((1,1),(1,-1)\big)$, *on obtient*

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}\big((1,1),(1,-1)+(1,1)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,1),(2,0)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big((1,1),\frac{1}{2}(2,0)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,1),(1,0)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big((1,1)-(1,0),(1,0)\big) = \mathrm{Vect}\big((0,1),(1,0)\big) \\ &= \{(\lambda,\mu) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

1.3 Familles de vecteurs

Dans cette partie, $(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.3.1 Familles génératrices

Définition 41
Soit $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs de* E. *On dit que la famille* $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ *est* ***génératrice*** *si tout vecteur de* E *est combinaison linéaire de la famille* $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ *:*

$$E = \mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I}).$$

Commençons par donner des exemples classiques de familles génératrices.

Exemples 42

- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *La famille* $(1, X, \dots, X^n)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{K}_n[X]$.
- *La famille* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{K}[X]$.
- *La famille* $((1,0),(0,1))$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$ *:*
  Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$.
- *La famille* $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$ *:*
  Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.
- *Plus généralement, soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Posons* $\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0)$, ..., $\vec{e}_n = (0,\dots,0,1)$.
  La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{K}^n$ *:*
  Pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$.

- *La famille* $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ *est une famille génératrice de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ *: pour tout* $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$
- *La famille* $(1,i)$ *est une famille génératrice du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$ *:*
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z=\mathrm{Re}(z)\times 1+\mathrm{Im}(z)\times i$.
- *La famille* (1) *est une famille génératrice du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $\mathbb{K}$ *:*
Pour tout $x\in\mathbb{K}$, $x=x\times 1$.

Lorsqu'un ensemble est écrit comme un Vect, on connaît immédiatement une famille génératrice.

Exemple 43 — *Nous avons vu à l'exemple* **??**, *par opérations élémentaires sur les* Vect, *que*
$$\mathrm{Vect}((1,1),(1,-1))=\mathbb{R}^2.$$
La famille $((1,1),(1,-1))$ *est donc une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

On peut aussi montrer, par résolution d'un système par exemple, que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$(x,y)=\frac{x+y}{2}(1,1)+\frac{x-y}{2}(1,-1).$$
On retrouve alors le résultat.

En effet, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. *On cherche* $\lambda_1\in\mathbb{R}$ *et* $\lambda_2\in\mathbb{R}$ *tels que* $(x,y)=\lambda_1(1,1)+\lambda_2(1,-1)$, *c'est-à-dire tels que* $(x,y)=(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1-\lambda_2)$. *On doit donc résoudre le système* $\begin{cases}x=\lambda_1+\lambda_2\\y=\lambda_1-\lambda_2\end{cases}$.

On trouve alors $\lambda_1=\dfrac{x+y}{2}$ *et* $\lambda_2=\dfrac{x-y}{2}$.

1.3.2 Familles libres et liées

Définition 44

- *Soient* $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ *des éléments de* E. *On dit que la famille* $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ *est* ***libre*** *si par définition, pour tout* $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, *si* $\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot\vec{x}_i=\vec{0}_E$ *alors, pour tout* $i\in\{1,\dots,n\}$, $\lambda_i=0$.
On dit aussi que les vecteurs $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ *sont* ***linéairement indépendants*** \线性无关\.
- *Soit* $(\vec{x})_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* E. *On dit que la famille* $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ *de vecteurs de* E *est* ***libre*** *si toute sous-famille* ***finie*** *de* $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ *est libre.*

Proposition 45
Soit $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ *une famille libre de* E. *Soit* $\vec{x}\in\mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$. *Alors les coefficients* λ_i *dans la décomposition* $\vec{x}=\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot\vec{x}_i$ *sont uniques :*

Pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ *et tout* $(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n$, *si* $\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot\vec{x}_i=\sum_{i=1}^n\mu_i\cdot\vec{x}_i$ *alors, pour tout* $i\in\{1,\dots,n\}$, $\lambda_i=\mu_i$.

Preuve — Supposons que $\vec{x}=\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot\vec{x}_i$ et $\vec{x}=\sum_{i=1}^n\mu_i\cdot\vec{x}_i$.

On a donc
$$\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot\vec{x}_i=\sum_{i=1}^n\mu_i\cdot\vec{x}_i,$$
soit
$$\sum_{i=1}^n(\lambda_i-\mu_i)\cdot\vec{x}_i=\vec{0}_E.$$

Donc, la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ étant libre, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, soit $\lambda_i = \mu_i$.

D'où le résultat. $\square$

Cela nous autorise donc à identifier les coefficients dans les combinaisons linéaires (uniquement lorsque la famille est libre !).

DÉFINITION 46
*Soit $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que la famille $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ est **liée** si elle n'est pas libre.*

Autrement dit, il existe $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ éléments de la famille $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

*On dit aussi que les vecteurs $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ sont **linéairement dépendants**.*

PROPOSITION 47
Soient $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ des éléments de E. La famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_n$ est combinaison linéaire des autres vecteurs.

Preuve — $\triangleright$ Supposons que la $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ soit liée. Alors il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Il existe donc $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On a donc

$$\lambda_{i_0} \cdot \vec{x}_{i_0} + \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i\neq i_0}} \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E.$$

Donc

$$\vec{x}_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \cdot \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i\neq i_0}} \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ i\neq i_0}} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \cdot \vec{x}_i.$$

Donc $\vec{x}_{i_0}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

$\triangleleft$ Réciproquement, supposons que $\vec{x}_{i_0} = \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ i\neq i_0}} \lambda_i \cdot \vec{x}_i$. Alors on a $1 \cdot \vec{x}_{i_0} + \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq i_0}} (-\lambda_i) \cdot \vec{x}_i = \vec{0}_E$ et les λ_i sont non tous nuls puisque $\lambda_{i_0} = 1$. Donc la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ est liée. $\square$

La remarque suivante découle de la définition de deux vecteurs colinéaires.

REMARQUE 48 — *Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des éléments de E. La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est liée si et seulement si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.*

Donnons des exemples classiques de familles libres.

EXEMPLES 49

- *La famille $(1, i)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.*

  ***Preuve** — Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot i = 0$. Alors, par identification des parties réelles et imaginaires, $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. D'où la liberté de la famille $(1, i)$ dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.* $\square$

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\vec{e}_1 = (1, 0 \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$. La famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.*

  ***Preuve** — Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{e}_i = \vec{0}_{\mathbb{K}^n}$.*

  On a $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{e}_i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\vec{0}_{\mathbb{K}^n} = (0, \ldots, 0)$.

  Donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$ et donc, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i = 0$. $\square$

- *La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.*

  ***Preuve** — Soit $(X^{d_1}, \ldots, X^{d_p})$ une sous-famille finie de de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $d_1 < d_2 < \ldots < d_p$. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\lambda_1 X^{d_1} + \ldots + \lambda_p X^{d_p} = 0$. Alors par unicité des coefficients du polynôme nul, $\lambda_1 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$. Donc la famille $(X^{d_1}, \ldots, X^{d_p})$ est libre.*

  Toute sous-famille finie de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc libre, et donc la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. $\square$

- *La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.*

  ***Preuve** — La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une sous-famille finie de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui, on vient de le voir, est libre. Par définition de la liberté d'une famille infinie, la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est donc libre.*

  On peut aussi le démontrer en revenant à la définition pour une famille finie. $\square$