北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Géométrie 2

ÉCOLE CENTRALE DE PÉKIN

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

28 février 2021

Table des matières

Chapitre 1 Espaces vectoriels

De nombreux problèmes de mathématiques ou de physique vérifient la propriété suivante : si u et v sont deux solutions d'un problème alors $u+v$ est aussi solution de ce problème, ainsi que ku, k étant un nombre réel ou complexe. Ces problèmes sont dit linéaires et sont souvent plus faciles à résoudre que les problèmes plus généraux, dits non linéaires. Ce chapitre est le premier chapitre d'algèbre linéaire.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les résultats présentés demeurent vrais sur un corps quelconque.

1.1 Structure d'espace vectoriel

1.1.1 Premières définitions

Définition 1
*On appelle **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ \域K上的线性空间 / 向量空间\, ou $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**, tout triplet $(E,+,\cdot)$ où E est un ensemble et*

- *$+$ est une loi de composition interne sur E : $E\times E \longrightarrow E$; $(\vec{x},\vec{y}) \longmapsto \vec{x}+\vec{y}$,*
- *$\cdot$ est une loi de composition externe de $\mathbb{K}$ sur E : $\mathbb{K}\times E \longrightarrow E$; $(\lambda,\vec{x}) \longmapsto \lambda\cdot\vec{x}$,*

vérifiant les propriétés suivantes :

1. *$(E,+)$ est un groupe abélien,*
2. *pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et tout $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$,*
   (a) $\lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$,
   (b) $(\lambda+\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}$,
   (c) $(\lambda\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})$,
   (d) $1\cdot\vec{x} = \vec{x}$.

Remarque 2 — *Souvent, on parle du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E à la place du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précise pas nécessairement le corps $\mathbb{K}$.*

Définition 3
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- *Les éléments de l'espace vectoriel E sont appelés les **vecteurs** \向量\.*
- *Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires** \标量\.*
- *La loi $+$ est appelée **addition**.*
- *La loi $\cdot$ est appelée **multiplication par un scalaire**.*
- *L'élément neutre du groupe $(E,+)$ est noté $\vec{0}_E$ ou $\vec{0}$ et est appelé le **vecteur nul** de E.*

Il ne faut pas confondre le vecteur nul $\vec{0}_E$ de E et le scalaire nul 0 de $\mathbb{K}$.

Remarque 4 — *La notation $\lambda\cdot\vec{x}$ est souvent remplacée par $\lambda\vec{x}$. Mais on n'écrit pas $\vec{x}\lambda$. Les flèches sur les vecteurs de E sont également souvent omises : on note x à la place de $\vec{x}$.*

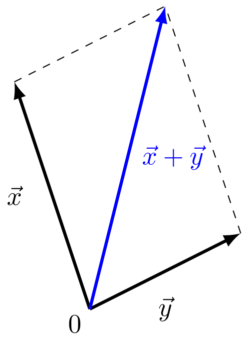
Les règles que nous venons de définir sont celles que l'on connait déjà sur les vecteurs du plan et de l'espace : en considérant deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, on peut

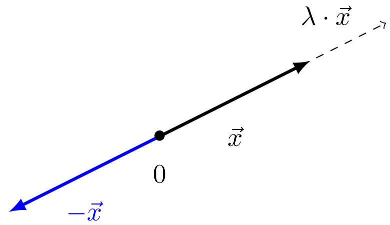
- sommer ces vecteurs : $\vec{x}+\vec{y}$,
- faire la différence de ces vecteurs : $\vec{x}-\vec{y}$,

- multiplier $\vec{x}$ par un scalaire λ : $\lambda \cdot \vec{x}$,
- calculer des expressions de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i$, où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\vec{x}_i \in E$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Par contre, la multiplication de deux vecteurs n'est pas définie.

Nous pourrons nous représenter les espaces vectoriels à l'aide d'un modèle géométrique qui pourra nous aider à visualiser les problèmes. Il faudra alors considérer des vecteurs ayant tous la même origine, ce point jouant le rôle du vecteur nul.





1.1.2 Premiers exemples fondamentaux

Nous donnons des exemples fondamentaux d'espaces vectoriels. Les vérifications sont faciles mais longues.

1.1.2.a. L'ensemble $\mathbb{K}^n$

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ des lois suivantes :

Pour tout $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et tout $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ éléments de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

∗ $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,

∗ $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Alors $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Preuve —

1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien, donc $(\mathbb{R}^n, +)$ l'est aussi.
2. (a) Soient $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ des éléments de $\mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) &= \lambda \cdot (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \ldots, \lambda(x_n + y_n))\\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \ldots, \lambda x_n + \lambda y_n)\\ &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)\\ &= \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}.\end{aligned}$$
   (b) Soient $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} &= ((\lambda + \mu)x_1, \ldots, (\lambda + \mu)x_n)\\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \ldots, \lambda x_n + \mu x_n)\\ &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \ldots, \mu x_n)\\ &= \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}.\end{aligned}$$
   (c) Soient $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et λ et μ des éléments de $\mathbb{R}$. On a
$(\lambda\mu) \cdot \vec{x} = ((\lambda\mu)x_1, \ldots, (\lambda\mu)x_n) = (\lambda(\mu x_1), \ldots, \lambda(\mu x_n)) = \lambda \cdot (\mu x_1, \ldots, \mu x_n) = \lambda \cdot (\mu \cdot (x_1, \ldots, x_n)) = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$,
   (d) Soit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a $1 \cdot \vec{x} = (1x_1, \ldots, 1x_n) = (x_1, \ldots, x_n) = \vec{x}$.

□

Notons qu'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est $\vec{0}_{\mathbb{R}^n} = (0, \ldots, 0)$.

En particulier, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un vecteur est alors un réel et $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \times x$, multiplication entre deux réels.

On retrouve les vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ et les vecteurs de l'espace avec $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5 — *Dans* $\mathbb{R}^3$, $(1,2,0)+2\cdot(0,1,1)=(1,4,2)$.

• De même, $(\mathbb{C}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En particulier, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les vecteurs sont les nombres complexes et les scalaires sont les nombres réels. On a $\lambda\cdot\vec{x}=\lambda\times x$, multiplication entre un réel et un complexe.

Remarque 6 — *Plus généralement, tout espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *est aussi un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

1.1.2.b. L'ensemble des polynômes

• Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $E=\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ des lois suivantes :

Pour tout $P=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ et $Q=b_0+b_1X+\ldots+b_nX^n$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

- $\ast$ $P+Q=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\ldots+(a_n+b_n)X^n$,
- $\ast$ $\lambda\cdot P=\lambda a_0+\lambda a_1X+\ldots+\lambda a_nX^n$.

Alors $(\mathbb{R}_n[X],+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Preuve — Exercice. □

Notons qu'un vecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme P qui s'écrit sous la forme $P=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$, où pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, $a_i\in\mathbb{R}$.

Le vecteur nul de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\vec{0}_{\mathbb{R}^n[X]}=0$, le polynôme nul.

• De même $(\mathbb{C}_n[X],+,\cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

• Plus généralement, $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $+$ et $\cdot$ sont les opérations usuelles sur les polynômes.

Exemple 7 — *Dans* $\mathbb{R}_2[X]$, $1+X+X^2-2(X-X^2)=1-X+3X^2$.

1.1.2.c. L'ensemble des matrices

• Soit $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ des lois suivantes :

Pour tout $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et tout $B=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$ éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$,

- $\ast$ $A+B=\begin{pmatrix}a+a'&b+b'\\c+c'&d+d'\end{pmatrix}$,
- $\ast$ $\lambda\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b\\\lambda c&\lambda d\end{pmatrix}$.

Alors $(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve — Exercice. □

Notons qu'un vecteur de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est une matrice $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

Le vecteur nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est $\vec{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Exemple 8 — *Dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

• Plus généralement, pour tout $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (voir cours d'algèbre 2), où $+$ et $\cdot$ sont les opérations usuelles sur les matrices.

1.1.2.d. L'ensemble des suites

Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des lois suivantes :

Pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de $\mathbb{K}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
* $\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve — Exercice. □

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle $(0)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.1.2.e. Le produit d'espaces vectoriels

Soient E_1, …, E_n des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Posons $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, le produit cartésien de E_1, …, E_n. On munit E des lois suivantes :

Pour tout $\vec{x} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ et tout $\vec{y} = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ éléments de E et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

* $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \ldots, \vec{x}_n + \vec{y}_n)$,
* $\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot \vec{x}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{x}_n)$.

Alors $(E_1 \times \ldots \times E_n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On l'appelle l'**espace vectoriel produit** \积空间\.

Preuve —La preuve est proche de celle faite pour $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$. Vérifions seulement deux points de la définition.

• Pour tout $\vec{x} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E$, $1 \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = (1 \cdot \vec{x}_1, \ldots, 1 \cdot \vec{x}_n) = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \vec{x}$.

• Pour tout $\vec{x} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ et $\vec{y} = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ éléments de E, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) &= \lambda \cdot (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \ldots, \vec{x}_n + \vec{y}_n) \\
&= (\lambda \cdot (\vec{x}_1 + \vec{y}_1), \ldots, \lambda \cdot (\vec{x}_n + \vec{y}_n)) \\
&= (\lambda \cdot \vec{x}_1 + \lambda \cdot \vec{y}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{x}_n + \lambda \cdot \vec{y}_n) \\
&= (\lambda \cdot \vec{x}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{x}_n) + (\lambda \cdot \vec{y}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{y}_n) \\
&= \lambda \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) + \lambda \cdot (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n) \\
&= \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}.
\end{aligned}$$

□

Le vecteur nul de $E_1 \times \ldots E_n$ est $\vec{0}_{E_1 \times \ldots \times E_n} = (\vec{0}_{E_1}, \ldots, \vec{0}_{E_n})$.

Remarque 9 — *Ainsi, on retrouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .*

1.1.2.f. L'ensemble des applications de X dans E

Soient X un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On munit l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E des lois suivantes :

Pour tout f et tout g éléments de $\mathcal{F}(X, E)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

* $f + g$ est l'application de X dans E définie, pour tout $x \in X$, par
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
* $\lambda \cdot f$ est l'application de X dans E définie, pour tout $x \in X$, par
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x)) .$$

Alors $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve — Démontrons seulement deux points de la définition.

Soient f et g des éléments de $\mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

• On a $1 \cdot f = f$. En effet, pour tout $x \in X$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot (f(x)) = f(x)$.

• On a $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$. En effet, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot (f+g))(x) &= \lambda \cdot ((f+g)(x)) \\ &= \lambda \cdot (f(x)+g(x)) \\ &= \lambda \cdot (f(x)) + \lambda \cdot (g(x)) \\ &= (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x) \\ &= (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(x).\end{aligned}$$

□

Le vecteur nul de $\mathcal{F}(X,E)$, $\vec{0}_{\mathcal{F}(X,E)}$, est l'application nulle : $X \longrightarrow E\ ;\ x \longmapsto \vec{0}_E$.

EXEMPLE 10 — *Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et leur multiplication par un réel. Il s'agit du cas particulier où $X = I$ et $E = \mathbb{R}$.*

EXEMPLE 11 — *Prenons $X = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Soient f et g éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par*

$$f(x) = (1+x, x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = (\exp(x), -x).$$

Alors $f+g$ est l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$(f+g)(x) = (x+1+\exp(x), x^2 - x).$$

REMARQUE 12 — *On retrouve que l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition des suites et leur multiplication par un élément de $\mathbb{K}$.*